

TD n° 3 : familles de vecteurs

1. Déterminer si les familles de vecteurs suivantes sont libres :

- (a) $v_1 = (4, -2, 6)$, $v_2 = (6, -3, 9)$;
- (b) $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (3, -1, 5)$, $v_3 = (1, 2, 4)$;
- (c) $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (3, -1, 5)$, $v_3 = (1, -4, 3)$;
- (d) $v_1 = (2, -3, 1)$, $v_2 = (3, -1, 5)$, $v_3 = (1, -4, 3)$, $v_4 = (1, 2, 4)$.

2. Soit E un espace vectoriel réel.

- (a) $\{u_1, u_2, u_3\}$ une famille libre de E . Montrer que $\{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_1\}$ est libre.
- (b) Soit $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ une famille libre de E . Montrer que $\{u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_3 + u_4, u_4 + u_1\}$ est liée.

3. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $\vec{e}_1(1, 2, 3, 4)$ et $\vec{e}_2(1, -2, 3, -4)$. Peut-on déterminer x et y pour que $(x, 1, y, 1) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$? Et pour que $(x, 1, 1, y) \in \text{Vect}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$?

4. Soit E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $B = (i, j)$ une base de E . u et v sont deux éléments de E de coordonnées dans cette base $[u]_B = (m, -2)$ et $[v]_B = (2, m)$ où m est un réel. Montrer que (u, v) est une base de E .

5. Soit $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 0, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- (a) Montrer que $B = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) Soit $t = (x, y, z)$. Calculer $[t]_B$.

6. Dans $\mathbb{R}^5$, trouver une base du sous-espace défini par

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 0 \\ 2x + 3y + 3z + t + u = 0 \end{cases}$$

7. Trouver un système d'équations représentant le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(2, 3, -3, 0)$, $(-1, 2, 1, 3)$ et $(1, 2, -1, -2)$.

8. On donne $u = (m, 1, 3)$, $v = (0, m, 1)$ et $w = (1, 0, m)$ où m est un paramètre réel. Montrer qu'il existe trois valeurs de m pour lesquelles $B = (u, v, w)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$.

9. On note $\mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales de degré au plus n . on note $p_{k,n}(x) = x^k \cdot (1-x)^{n-k}$. Montrer que $(p_{0,n}, p_{1,n}, \dots, p_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

[indic : montrer que pour $i = 0, \dots, n$: $1 = \sum_{k=0}^{n-i} C_{n-i}^k x^k \cdot (1-x)^{n-i-k}$]

10. Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ et $F = \text{Vect}(\{f, g\})$.

- (a) Les applications $i(x) = \cos 2x$, $j(x) = \cos^2 x$ et $k(x) = 2 \sin(x + \frac{\pi}{3})$ appartiennent-elles à F ?
- (b) Soit $h(x) = 1$. Montrer que (h, f, g) est libre.