Recherche d'un flot maximal dans un réseau de transport
Algorithme de Ford-Fulkerson

Réseau de transport Un *réseau de transport* est un graphe orienté sans boucle comportant un sommet unique sans prédécesseurs (entrée ou source), un sommet unique sans successeurs (sortie ou puits), valué en chaque arc par un nombre positif (capacité de l'arc) et tel qu'il existe un chemin de l'entrée vers la sortie.

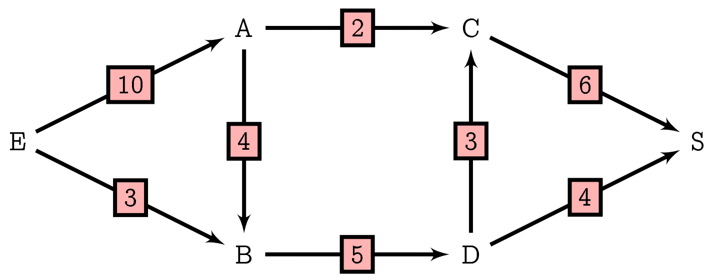


FIGURE 1 – Un exemple de réseau de transport

Si $G = (X, U)$ est un réseau de transport, si $c(u)$ dénote les capacités des arcs $u \in U$, un *flot* ϕ sur G est une application de U dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall u \in U, \quad \phi(u) \leq c(u)$
- $\forall x \in X$, différent de l'entrée et de la sortie : $\sum_{u \in U_x^-} \phi(u) = \sum_{u \in U_x^+} \phi(u)$ (ce qui rentre = ce qui sort) où U_x^- et U_x^+ sont les arcs entrants et sortants de x.

On appelle *valeur du flot* ce qui rentre en entrée (égal à ce qui sort)

$$F = \sum_{u \in U_s^-} \phi(u) = \sum_{u \in U_e^+} \phi(u)$$

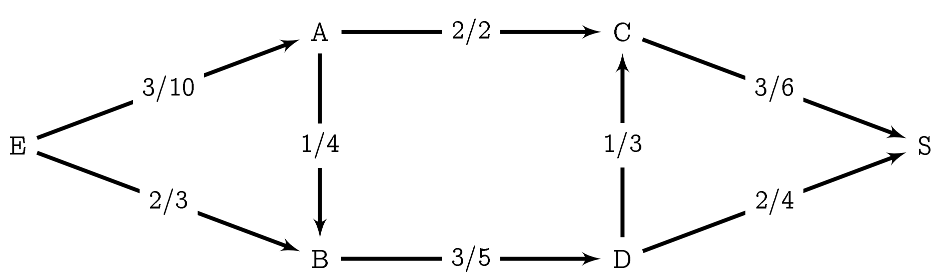


FIGURE 2 – Un flot de valeur 5 dans le réseau précédent

Problème Trouver un flot maximal

L'algorithme de Ford-Fulkerson permet de construire par augmentation successive un flot maximal.

1. **Inialisation** : On part d'un flot initial quelconque (on peut prendre le flot nul).
2. **Marquage** : On essaye ensuite de construire des chaînes augmentantes (qui vont augmenter la valeur du flot). On va essayer de marquer les sommets. On marque l'entrée du réseau (avec la marque + par exemple), puis on applique dans n'importe quel ordre et tant que c'est possible l'une des deux règles suivantes :
   — marquer l'extrémité J de tout arc IJ, dont la seule origine I est déjà marqué, et qui est non saturé (par exemple $+J$)
   — marquer l'origine I de tout arc IJ dont seule l'extrémité J est déjà marquée qui a un flot non nul (par exemple $-I$).

   Si l'on ne parvient pas à marquer la sortie, c'est que le flot établi est maximal. Sinon, le flot peut être amélioré.
3. **Amélioration** (lorsque la sortie a été marquée)

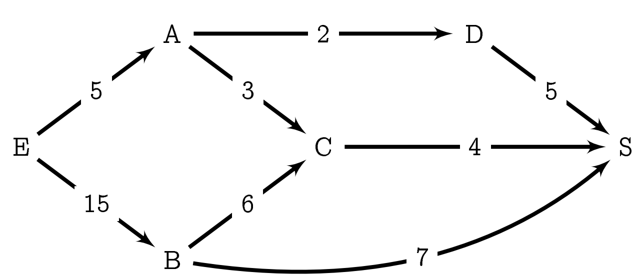
   Soit une suite S de marques héritées les unes des autres entre x_e et x_s (entrée et sortie). On va améliorer l'afflux en x_s en modifiant les flots de tous les arcs de S. Soient $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ les arcs de S orientés comme sur le graphe (dans le bon sens). Ils sont tous non saturés ; On pose $v_1 = \min_j c_{i_j} - \phi_{i_j}$. $v_1 > 0$. Soient $u'_{j_1}, \ldots, u'_{j_q}$ les autres arcs de S. Ils ont tous un flot non nul, donc si $v_2 = \min_i \phi_{j_i}$, alors $v_2 > 0$. On pose $v = \min\{v_1, v2\}$.

   On peut alors augmenter le flot en accroissant de v le flot sur les arcs parcourus dans le bon sens et en diminuant de v le flot sur les arcs parcourus en sens inverse (on respecte bien la conservation en chaque sommet).

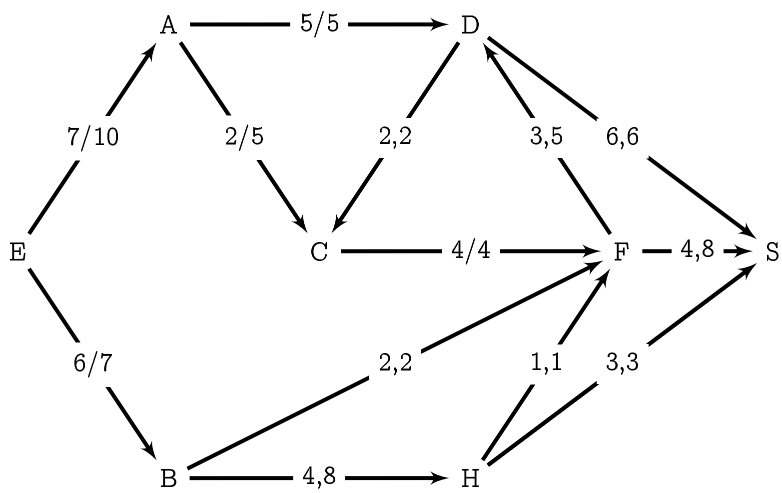
   Et on recommence.

Exercices

1. Appliquer l'algorithme au réseau de la figure 1.
2. Trouver un flot maximal pour le réseau suivant :



3. Soit un le réseau avec le flot suivant :



Ce flot est-il maximal ? sinon, l'optimiser.

4. On dispose en 4 points A, B, C, D de quantités disponibles qu'on désire acheminer en 4 points E, F, G, H. L'objectif recherché est la satisfaction maximum de la demande globale aux points destinations.

origine	disponible	destination	demande
A	36	E	30
B	30	F	24
C	30	G	27
D	30	H	45

avec la matrice de capacités :

	E	F	G	H
A	21	9	6	9
B	15	12	3	0
C	0	6	12	24
D	0	6	12	24

Résoudre le problème avec l'algorithme de Ford-Fulkerson.