Graphes

Jérémy Possamaï

DUT Informatique

2018-2019

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;
  - $E \subset V \times V$ d'éléments appelés *arêtes* (*edges*).

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;
  - $E \subset V \times V$ d'éléments appelés *arêtes* (*edges*).
- $\{x, x\} \in E$ est une *boucle*

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;
  - $E \subset V \times V$ d'éléments appelés *arêtes* (*edges*).
- $\{x, x\} \in E$ est une *boucle*
- Si les éléments de E sont ordonnés : graphe *orienté* (GO) et *arc* plutôt qu'arête.

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;
  - $E \subset V \times V$ d'éléments appelés *arêtes* (*edges*).
- $\{x, x\} \in E$ est une *boucle*
- Si les éléments de E sont ordonnés : graphe *orienté* (GO) et *arc* plutôt qu'arête.
- $\text{card}(V) = |V|$: *ordre* du graphe (parfois noté $|G|$)

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;
  - $E \subset V \times V$ d'éléments appelés *arêtes* (*edges*).
- $\{x, x\} \in E$ est une *boucle*
- Si les éléments de E sont ordonnés : graphe *orienté* (GO) et *arc* plutôt qu'arête.
- $\mathrm{card}(V) = |V|$: *ordre* du graphe (parfois noté $|G|$)
- Si $xy \in E$: x et y sont *adjacents* (ou *voisins*)

Définitions

- Un graphe $G = (V, E)$ est un couple constitué d'un ensemble :
  - V d'éléments appelés *sommets* (*vertices*) ;
  - $E \subset V \times V$ d'éléments appelés *arêtes* (*edges*).
- $\{x, x\} \in E$ est une *boucle*
- Si les éléments de E sont ordonnés : graphe *orienté* (GO) et *arc* plutôt qu'arête.
- $\mathrm{card}(V) = |V|$: *ordre* du graphe (parfois noté $|G|$)
- Si $xy \in E$: x et y sont *adjacents* (ou *voisins*)
- $N(x)$: ensemble des voisins (*neighbours*) de x

Définitions

- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle

Définitions

- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle
- G *complet* : simple et tous les sommets sont adjacents

Définitions

- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle
- G *complet* : simple et tous les sommets sont adjacents
- degré d'un sommet x (noté $d(x)$) : $|N(x)|$

Définitions

- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle
- G *complet* : simple et tous les sommets sont adjacents
- degré d'un sommet x (noté $d(x)$) : $|N(x)|$
- graphe k-*régulier* : $\forall x \in V \quad d(x) = k$

Définitions

- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle
- G *complet* : simple et tous les sommets sont adjacents
- degré d'un sommet x (noté $d(x)$) : $|N(x)|$
- graphe k-*régulier* : $\forall x \in V \quad d(x) = k$
- Pour un GO, on distingue :

Définitions

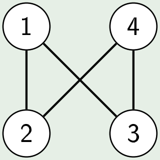
- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle
- G *complet* : simple et tous les sommets sont adjacents
- degré d'un sommet x (noté $d(x)$) : $|N(x)|$
- graphe k-*régulier* : $\forall x \in V \quad d(x) = k$
- Pour un GO, on distingue :
  - *degré sortant* ($d^+(x)$) : nombre d'arcs ayant x pour origine ;

Définitions

- G *simple* : au plus une arête reliant deux sommets (sinon *multigraphe*) et pas de boucle
- G *complet* : simple et tous les sommets sont adjacents
- degré d'un sommet x (noté $d(x)$) : $|N(x)|$
- graphe k-*régulier* : $\forall x \in V \quad d(x) = k$
- Pour un GO, on distingue :
  - *degré sortant* ($d^+(x)$) : nombre d'arcs ayant x pour origine ;
  - *degré entrant* ($d^-(x)$) : nombre d'arcs ayant x pour extrémité ;

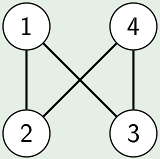
Exemple

Graphe non orienté d'ordre 4
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$
simple, non complet, 2-régulier



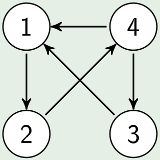
Exemple

Graphe non orienté d'ordre 4
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$
simple, non complet, 2-régulier



Exemple

Graphe orienté d'ordre 4
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{(1, 2), (3, 1), (2, 4), (4, 3), (4, 1)\}$
simple, non complet
$d^-(1) = 2$; $d^+(3) = 1$



Question

Existe-t-il un graphe d'ordre 3 dont les sommets ont pour degrés respectifs 1, 2, 2 ?

Question

Existe-t-il un graphe d'ordre 3 dont les sommets ont pour degrés respectifs 1, 2, 2 ?

Proposition

Soit $G = (V, E)$ un GNO.

$$\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$$

Soit $G = (V, E)$ un GO.

$$\sum_{x \in V} (d^+(x) + d^-(x)) = 2|E|$$

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe. La *matrice d'adjacence* de G est définie par :

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un GNO, M est symétrique.

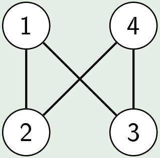
Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe. La *matrice d'adjacence* de G est définie par :

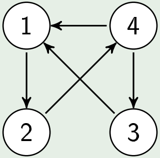
$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour un GNO, M est symétrique.

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



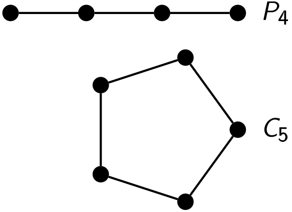
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

- chaîne P_n (*path*)

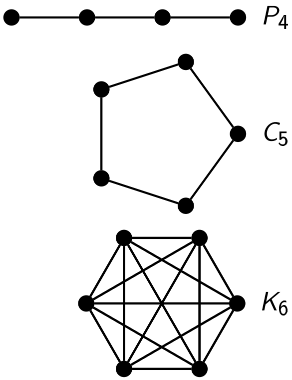
P_4

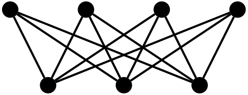
- chaîne P_n (*path*)



- cycle C_n

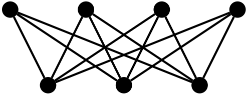
- chaîne P_n (*path*)
- cycle C_n
- complet K_n



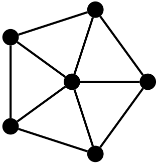


- biparti complet $K_{n,p}$

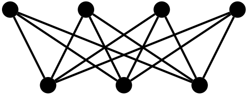
- biparti complet $K_{n,p}$



- roue W_n (*wheel*)

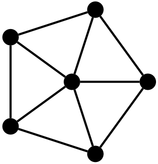


- biparti complet $K_{n,p}$



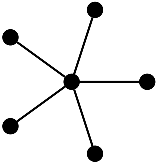
$K_{4,3}$

- roue W_n (*wheel*)



W_6

- étoile S_n (en fait c'est $K_{1,n-1}$!)



S_6

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Définition

Un *sous-graphe induit* de G est de la forme $G' = (V', E')$ avec $V' \subset V$, et $E' = \{xy \in E \mid x \in V' \wedge y \in V'\}$. Autrement, on retire des sommets, et on ne garde que les arêtes qui existent encore.
Un sous-graphe complet est appelé une *clique*.

Définition

Un *sous-graphe induit* de G est de la forme $G' = (V', E')$ avec $V' \subset V$, et $E' = \{xy \in E \mid x \in V' \wedge y \in V'\}$. Autrement, on retire des sommets, et on ne garde que les arêtes qui existent encore.
Un sous-graphe complet est appelé une *clique*.

Définition

Un *sous-graphe partiel* de G est de la forme $G' = (V, E')$ avec $E' \subset E$.
Autrement, on garde tous les sommets, et on retire des arêtes.

Exemple

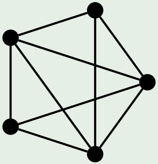
K_4 est un sous-graphe induit de K_5.

Exemple

K_4 est un sous-graphe induit de K_5.
P_4 est un sous-graphe partiel de C_4.

Exemple

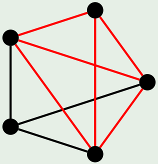
K_4 est un sous-graphe induit de K_5.
P_4 est un sous-graphe partiel de C_4.



Ce graphe contient deux 4-cliques.

Exemple

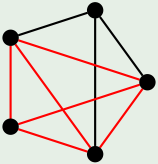
K_4 est un sous-graphe induit de K_5.
P_4 est un sous-graphe partiel de C_4.



Ce graphe contient deux 4-cliques.

Exemple

K_4 est un sous-graphe induit de K_5.
P_4 est un sous-graphe partiel de C_4.



Ce graphe contient deux 4-cliques.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Définition

Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\varphi : V \to V'$ telle que

$$\forall x, y \in V \quad xy \in E \Longleftrightarrow \varphi(x)\varphi(y) \in E' .$$

Si $G = G'$, on dit que G est *automorphe*.

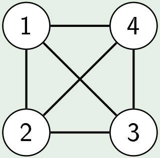
Définition

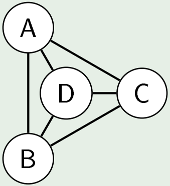
Deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$ sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\varphi : V \to V'$ telle que

$$\forall x, y \in V \quad xy \in E \iff \varphi(x)\varphi(y) \in E' .$$

Si $G = G'$, on dit que G est *automorphe*.

Exemple





$\varphi : \{1, 2, 3, 4\} \to \{A, B, C, D\}$
$\varphi(1) = A$
$\varphi(2) = B$
$\varphi(3) = C$
$\varphi(4) = D$

Définition

Un graphe est *planaire* s'il admet une représentation sans croisement d'arêtes.

Définition

Un graphe est *planaire* s'il admet une représentation sans croisement d'arêtes.

Exemple

D'après l'exemple précédent, K_4 est planaire.
Pour prouver qu'un graphe est planaire, il suffit de le représenter correctement. Mais pour prouver qu'il ne l'est pas...
Jeu : `planarity.net`
Androïd : Untangle et bien d'autres

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Définitions

- *chaîne* (resp. *cycle*) d'un GNO G : sous-graphe de G qui est lui-même une chaîne (resp. un cycle)

Définitions

- *chaîne* (resp. *cycle*) d'un GNO G : sous-graphe de G qui est lui-même une chaîne (resp. un cycle)
- *longueur* d'une chaîne (resp.cycle) : nombre d'arêtes qui la composent

Définitions

- *chaîne* (resp. *cycle*) d'un GNO G : sous-graphe de G qui est lui-même une chaîne (resp. un cycle)
- *longueur* d'une chaîne (resp.cycle) : nombre d'arêtes qui la composent
- Pour un GO, chaîne → *chemin* et cycle → *circuit*.

Proposition

Tout GNO sans cycle avec $|E| \geqslant 1$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1).

Proposition

Tout GNO sans cycle avec $|E| \geqslant 1$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1).

Démonstration.

Par l'absurde, supposons tous les sommets de degré $\geqslant 2$.

$\square$

Proposition

Tout GNO sans cycle avec $|E| \geqslant 1$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1).

Démonstration.

Par l'absurde, supposons tous les sommets de degré $\geqslant 2$.
Considérons une chaîne de longueur maximale $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.

$\square$

Proposition

Tout GNO sans cycle avec $|E| \geqslant 1$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1).

Démonstration.

Par l'absurde, supposons tous les sommets de degré $\geqslant 2$.
Considérons une chaîne de longueur maximale $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
Puisque $d(x_1) \geqslant 2$, il admet un autre voisin z.

$\square$

Proposition

Tout GNO sans cycle avec $|E| \geqslant 1$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1).

Démonstration.

Par l'absurde, supposons tous les sommets de degré $\geqslant 2$.
Considérons une chaîne de longueur maximale $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
Puisque $d(x_1) \geqslant 2$, il admet un autre voisin z.
Si $z = x_i$ pour un certain $3 \leqslant i \leqslant p$, il y a un cycle, ce qui est exclu. Donc z n'est pas dans la chaîne maximale.

$\square$

Proposition

Tout GNO sans cycle avec $|E| \geqslant 1$ possède au moins deux sommets pendants (de degré 1).

Démonstration.

Par l'absurde, supposons tous les sommets de degré $\geqslant 2$.
Considérons une chaîne de longueur maximale $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$.
Puisque $d(x_1) \geqslant 2$, il admet un autre voisin z.
Si $z = x_i$ pour un certain $3 \leqslant i \leqslant p$, il y a un cycle, ce qui est exclu. Donc z n'est pas dans la chaîne maximale.
Mais alors $(z, x_1, x_2, \ldots, x_p)$ est une chaîne de longueur supérieure ! $\square$

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe, et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe, et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Proposition

Le coefficient $(M^p)_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur p reliant les sommets i et j.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Définitions

- Un GNO est dit *connexe* si, pour toute paire $\{x, y\} \subset V$, il existe une chaîne reliant x à y.

Définitions

- Un GNO est dit *connexe* si, pour toute paire $\{x, y\} \subset V$, il existe une chaîne reliant x à y.
- UN GO est dit *fortement connexe* si, pour tout couple $(x, y) \in V^2$, il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y.

Définitions

- Un GNO est dit *connexe* si, pour toute paire $\{x, y\} \subset V$, il existe une chaîne reliant x à y.
- UN GO est dit *fortement connexe* si, pour tout couple $(x, y) \in V^2$, il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y.

Relation

Soit G un graphe, non nécessairement connexe. Pour $x, y \in V$ on définit :
$x\mathscr{R}y \iff$ il existe une chaîne reliant x à y.
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence sont appelées *composantes connexes* de G.
Un GNO est donc connexe s'il n'a qu'une seule composante connexe.

Soit G un GNO connexe.

Définitions

- La *distance* entre deux sommets est la longueur minimale d'une chaîne reliant x à y. On la note $d(x,y)$.

Soit G un GNO connexe.

Définitions

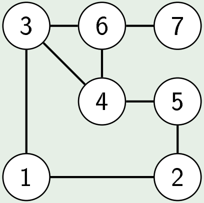
- La *distance* entre deux sommets est la longueur minimale d'une chaîne reliant x à y. On la note $d(x,y)$.
- Le *diamètre* de G est la plus grande distance séparant deux de ses sommets.

Soit G un GNO connexe.

Définitions

- La *distance* entre deux sommets est la longueur minimale d'une chaîne reliant x à y. On la note $d(x,y)$.
- Le *diamètre* de G est la plus grande distance séparant deux de ses sommets.

Exemple



$d(2,4)=2$ $\qquad$ $d(1,4)=2$ $\qquad$ $\mathrm{diam}(G)=d(2,7)=4$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

Par récurrence sur $n = |V|$.
Si $n = 1$, les six assertions sont bien équivalentes.
Soit $n \geqslant 2$. Supposons les assertions équivalentes pour tous les graphes d'ordre strictement inférieur à n. $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

$1 \Rightarrow 6$: supprimons une arête. Cela déconnecte G (sinon il y aurait un cycle). Les deux composantes obtenues sont connexes et sans cycle, d'ordre inférieur à n. Par HR :
$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + 1 = |V| - 1$. $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

$6 \Rightarrow 5$: par l'absurde, si G n'est pas connexe, notons $G_1, \ldots, G_k$ ses composantes connexes. Elles sont connexes, sans cycle car G l'est, et d'ordres inférieurs à n. Par HR : $|E| = \sum |E_i| = \sum |V_i| - k = |V| - k$. Or $|E| = |V| - 1$. Donc $k = 1$ et G est connexe ! $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

$5 \Rightarrow 3$: retirons une arête e ; si le graphe est toujours connexe, il admet au moins un sommet pendant. En retirant ce sommet ainsi que l'arête qui en part, il reste un graphe connexe avec $n-1$ sommets et $n-3$ arêtes. En itérant, on va trouver un graphe connexe avec 2 sommets et 0 arête ! $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

$3 \Rightarrow 2$: Soit $\{x, y\} \subset V$. Il existe une chaîne de x à y car G est connexe. Supposons par l'absurde qu'il y en a une autre. Alors il y a un cycle. En retirant une arête de ce cycle, G reste connexe ! $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

$2 \Rightarrow 4$: si G admettait un cycle, deux sommets de ce cycle seraient reliés par 2 chaînes ; donc G est sans cycle.
Si x et y ne sont pas adjacents ; il y a une unique chaîne de x vers y.
Mais en ajoutant l'arête xy on crée une deuxième chaîne. $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Démonstration.

$4 \Rightarrow 1$: Par l'absurde, si G non connexe, alors l'ajout d'une arête reliant deux composantes connexes ne crée pas de cycle ! $\square$

Arbres

Proposition

Soit G un GNO. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. G est connexe et sans cycle.
2. Pour tous sommets x et y, il existe une unique chaîne reliant x et y.
3. G est connexe, et ne l'est plus en retirant une arête.
4. G est sans cycle, et on crée un cycle en ajoutant une arête.
5. G est connexe et $|E| = |V| - 1$.
6. G est sans cycle et $|E| = |V| - 1$.

Définition

Un GNO qui vérifie l'une quelconque des assertions précédentes est appelé un *arbre*.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Peut-on trouver un cycle passant une fois et une seule par chaque arête ? Un tel cycle est appelé *eulérien*.
Peut-on trouver un cycle passant une fois et une seule par chaque sommet ? Un tel cycle est appelé *hamiltonien*.

Définitions

- Un graphe est *eulérien* (resp. *hamiltonien*) s'il admet un cycle eulérien (resp. hamiltonien).

Définitions

- Un graphe est *eulérien* (resp. *hamiltonien*) s'il admet un cycle eulérien (resp. hamiltonien).
- Un graphe est *semi-eulérien* (resp. *semi-hamiltonien*) s'il admet une chaîne eulérienne (resp. hamiltonienne).

Définitions

- Un graphe est *eulérien* (resp. *hamiltonien*) s'il admet un cycle eulérien (resp. hamiltonien).
- Un graphe est *semi-eulérien* (resp. *semi-hamiltonien*) s'il admet une chaîne eulérienne (resp. hamiltonienne).

Existe-t-il des conditions nécessaires et suffisantes « simples » pour justifier qu'une graphe est eulérien / hamiltonien ?

Eulérien

Théorème (Euler 1736)

- *Un graphe est eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*

Eulérien

Théorème (Euler 1736)

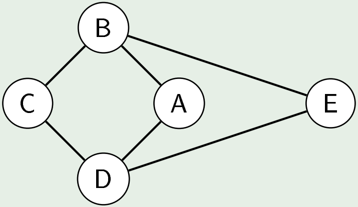
- *Un graphe est eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*
- *Un graphe est semi-eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets, sauf deux, sont de degré pair.*

Eulérien

Théorème (Euler 1736)

- *Un graphe est eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*
- *Un graphe est semi-eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets, sauf deux, sont de degré pair.*

Exemple



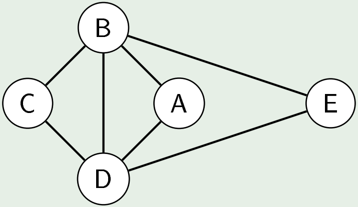
semi-eulérien

Eulérien

Théorème (Euler 1736)

- *Un graphe est eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets sont de degré pair.*
- *Un graphe est semi-eulérien SSI il est connexe et tous ses sommets, sauf deux, sont de degré pair.*

Exemple



eulérien

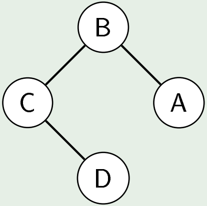
Hamiltonien, une tout autre affaire. . .

Problème NP-complet, on ne connaît pas de « bonne » condition (vérifiable en temps polynomial).

Hamiltonien, une tout autre affaire. . .

Problème NP-complet, on ne connaît pas de « bonne » condition (vérifiable en temps polynomial).

Exemple

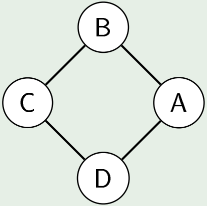


semi-hamiltonien

Hamiltonien, une tout autre affaire. . .

Problème NP-complet, on ne connaît pas de « bonne » condition (vérifiable en temps polynomial).

Exemple



hamiltonien

Quelques conditions suffisantes (mais non nécessaires) :

Quelques conditions suffisantes (mais non nécessaires) :

Théorème (Dirac 1952)

Si, dans un graphe d'ordre $n \geqslant 3$, tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à $n/2$, alors le graphe est hamiltonien.

Quelques conditions suffisantes (mais non nécessaires) :

Théorème (Dirac 1952)

Si, dans un graphe d'ordre $n \geqslant 3$, tous les sommets sont de degré supérieur ou égal à $n/2$, alors le graphe est hamiltonien.

Théorème (Ore 1960)

Si, dans un graphe d'ordre $n \geqslant 3$, pour toute paire de sommets $\{x, y\}$ non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geqslant n$, alors le graphe est hamiltonien.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

On veut parcourir (ou déterminer) une composante connexe en numérotant les sommets. Deux parcours classiques :

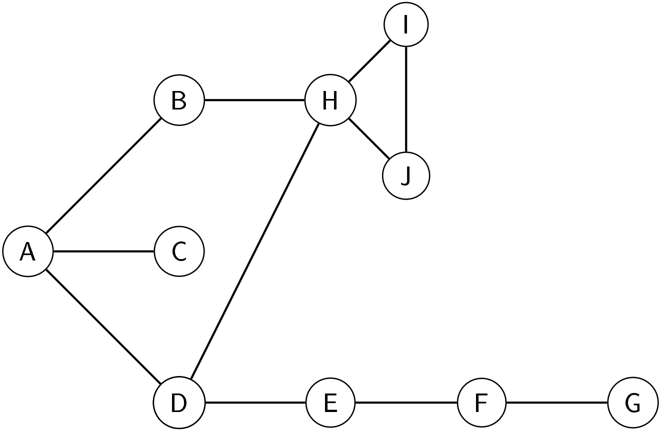
- parcours en largeur (BFS : *breadth-first search*)
- parcours en profondeur (DFS : *depth-first search*)

Parcours en largeur

Données : un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $x_0 \in V$
Résultat : une numérotation α en largeur de la composante connexe contenant x_0

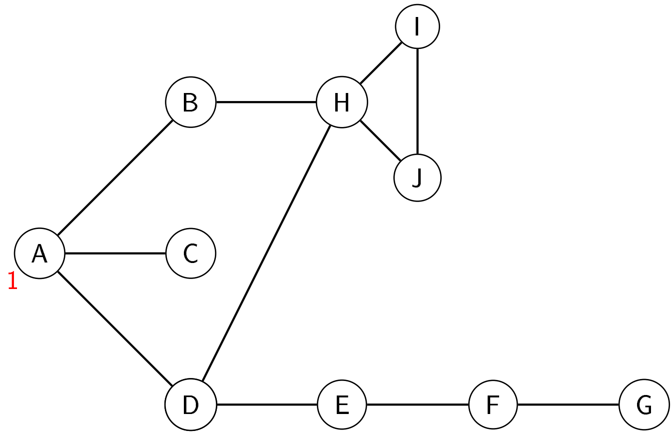
début
  $\text{FILE} \longleftarrow x_0$;
  $i \longleftarrow 1$;
  $\alpha(x_0) \longleftarrow 1$;
  tant que $\text{FILE} \neq \emptyset$ **faire**
    $x \longleftarrow \text{DEFILER}$;
    pour *chaque* $y \in N(x)$ *non numéroté* **faire**
      $i \longleftarrow i + 1$;
      $\alpha(y) \longleftarrow i$;
      $\text{ENFILER}(y)$;
    fin
  fin
  retourner α ;
fin

Exemple de BFS



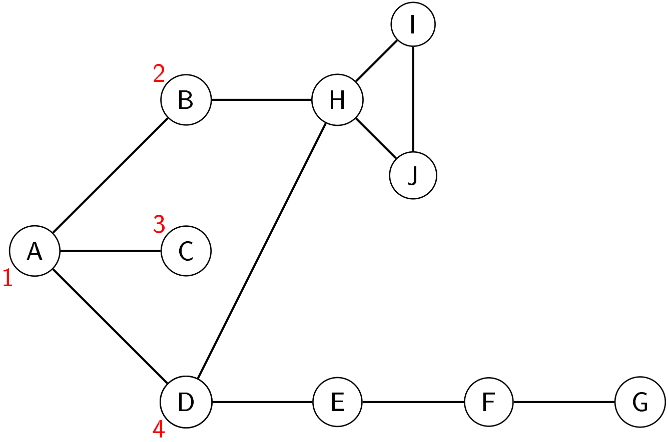
FILE : vide

Exemple de BFS



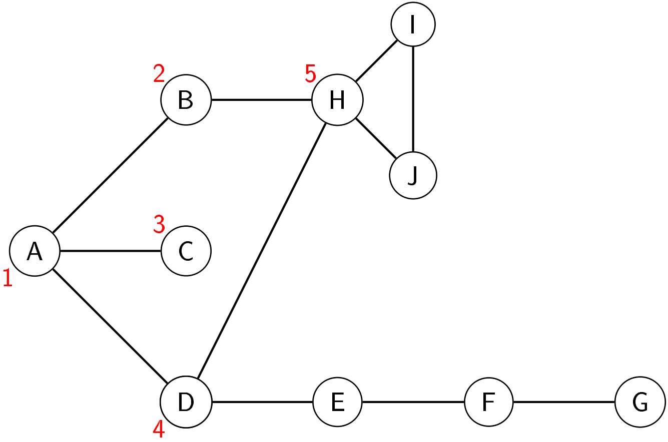
FILE : A

Exemple de BFS



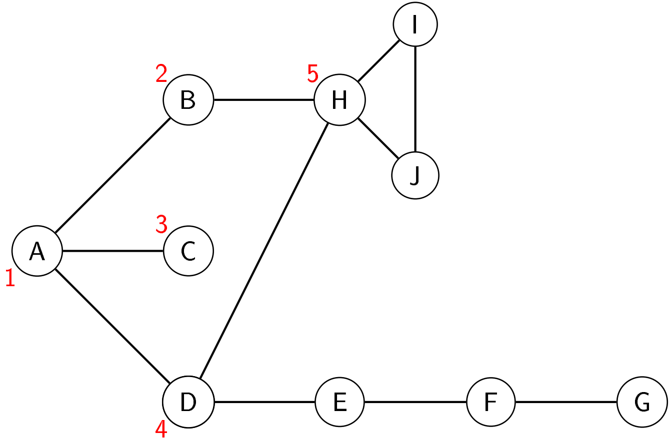
FILE : B C D

Exemple de BFS



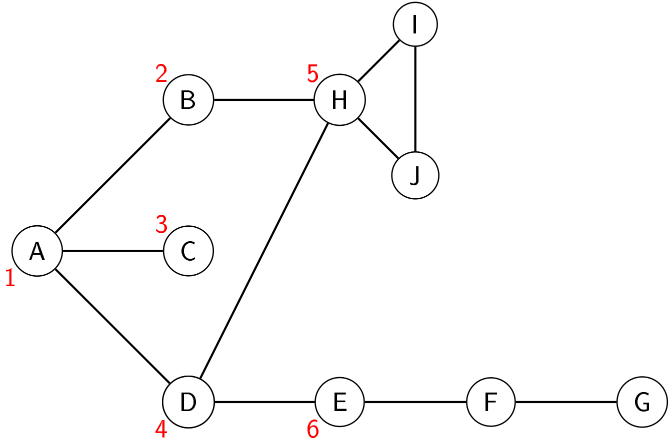
FILE : C D H

Exemple de BFS



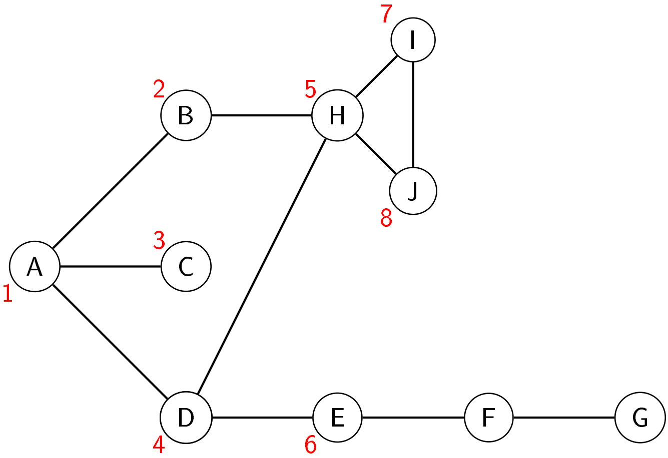
FILE : D H

Exemple de BFS



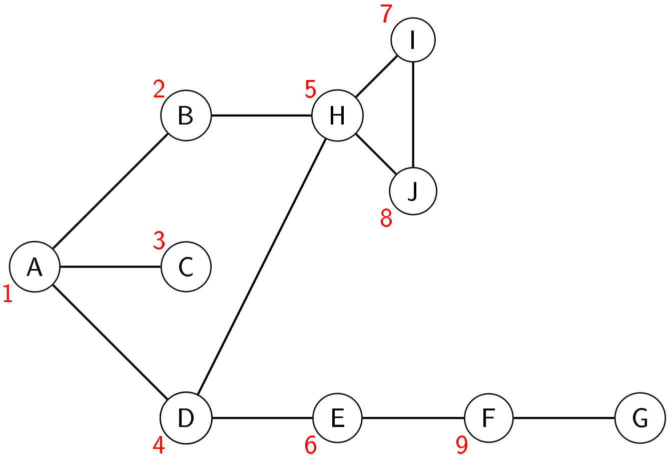
FILE : H E

Exemple de BFS



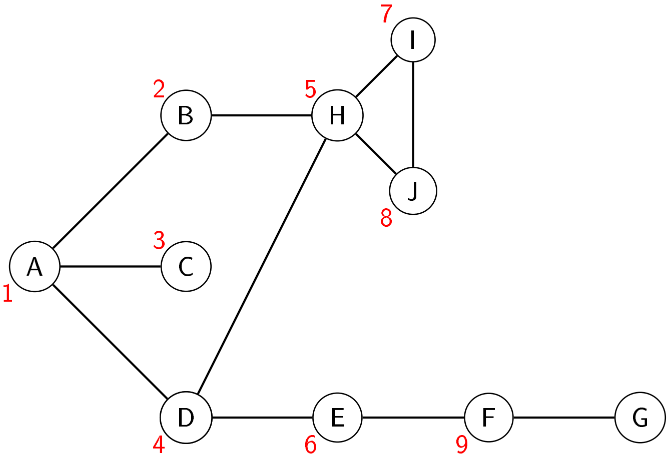
FILE : E I J

Exemple de BFS



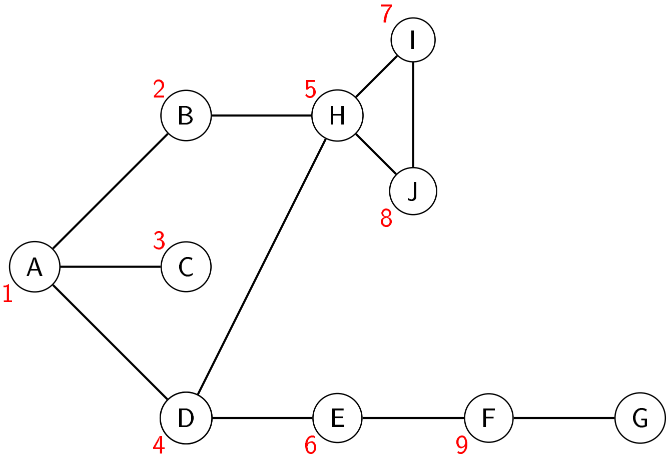
FILE : I J F

Exemple de BFS



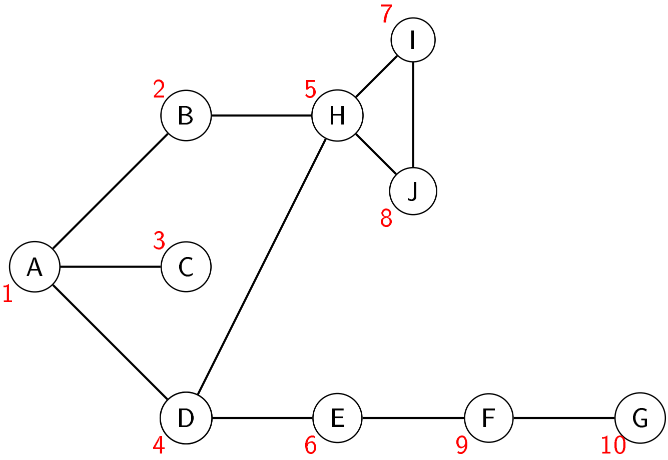
FILE : J F

Exemple de BFS



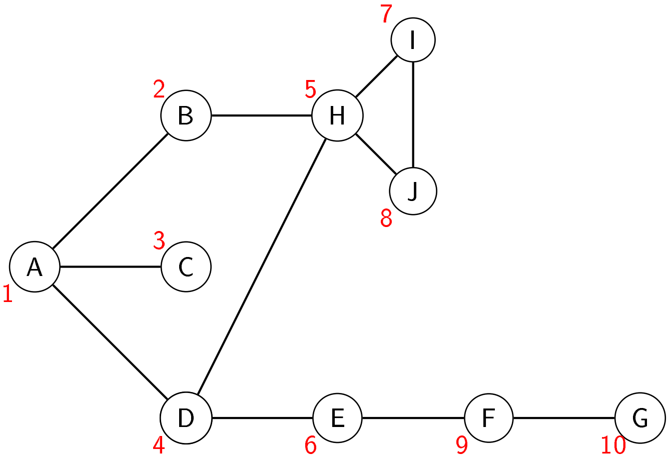
FILE : F

Exemple de BFS



FILE : G

Exemple de BFS



FILE : vide

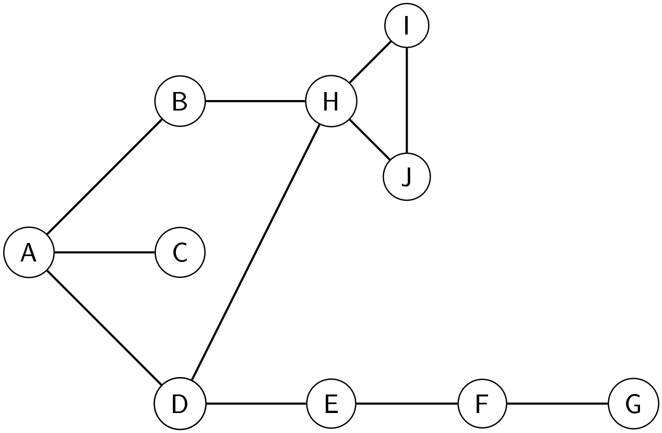
Parcours en profondeur

Données : un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $x_0 \in V$
Résultat : une numérotation α en profondeur de la composante connexe contenant x_0

début
- PILE $\longleftarrow x_0$;
- $i \longleftarrow 0$;
- **tant que** PILE $\neq \emptyset$ **faire**
  - $x \longleftarrow$ DEPILER ;
  - $i \longleftarrow i+1$;
  - $\alpha(x) \longleftarrow i$;
  - **pour** *chaque* $y \in N(x)$ *non numéroté et non déjà empilé* **faire**
    - EMPILER(y) ;
  - **fin**
- **fin**
- **retourner** α ;

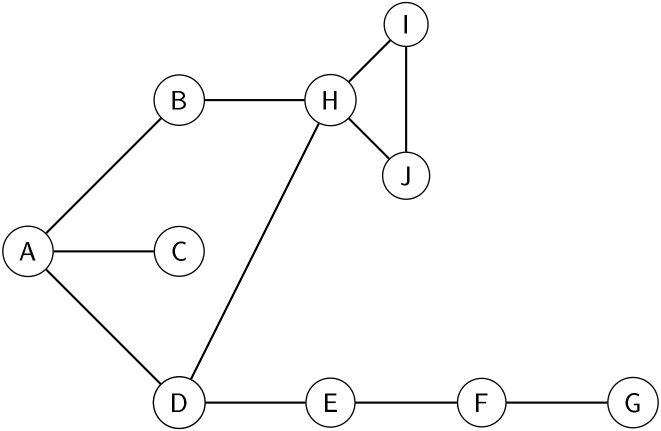
fin

Exemple de DFS



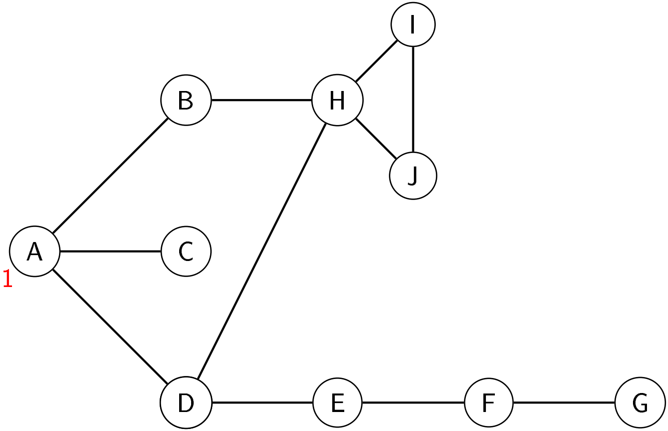
PILE : vide

Exemple de DFS



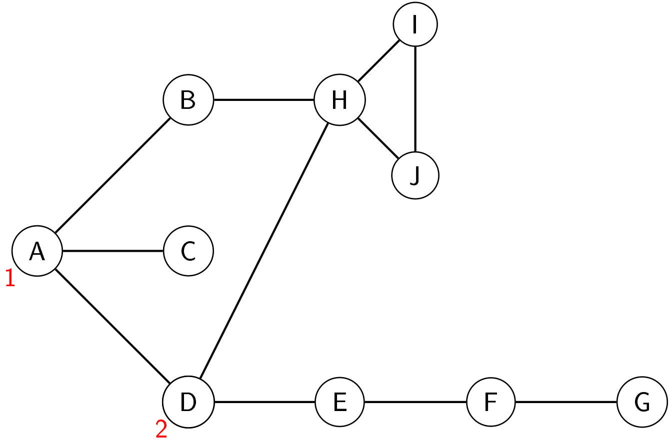
PILE : A

Exemple de DFS



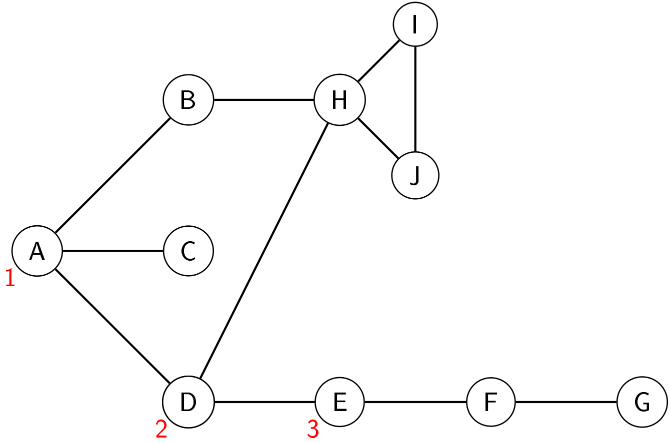
PILE : B C D

Exemple de DFS



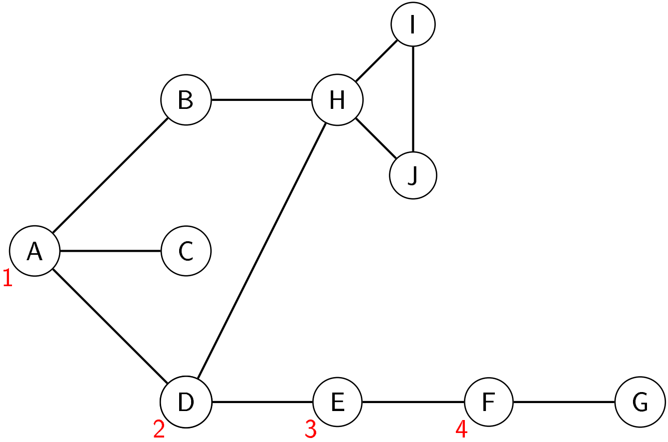
PILE : B C H E

Exemple de DFS



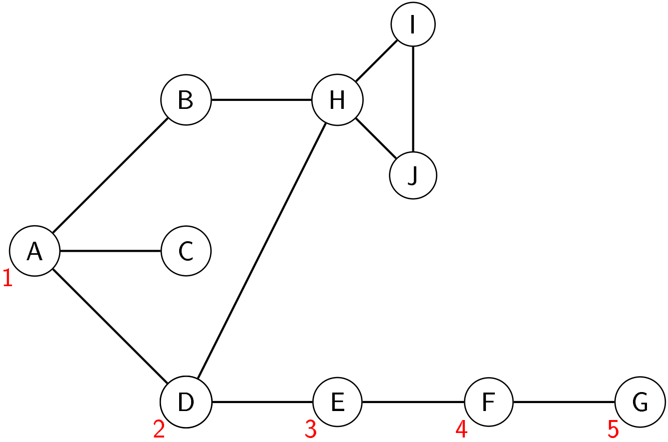
PILE : B C H F

Exemple de DFS



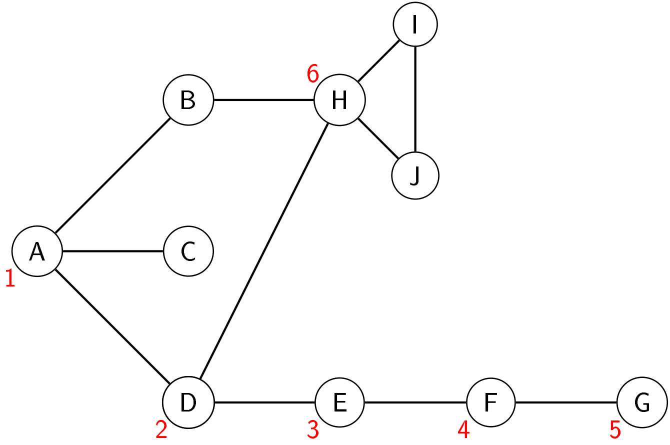
PILE : B C H G

Exemple de DFS



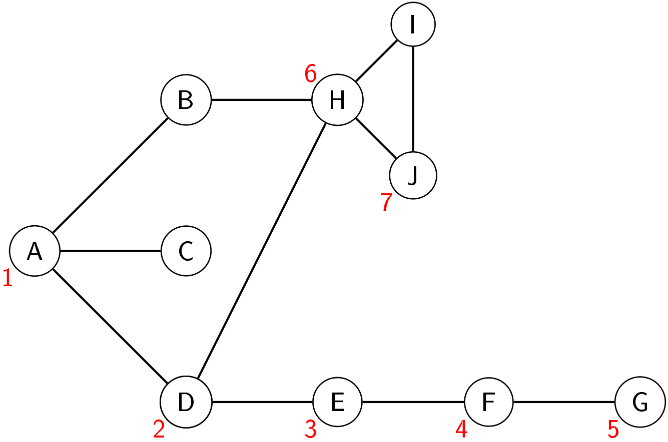
PILE : B C H

Exemple de DFS



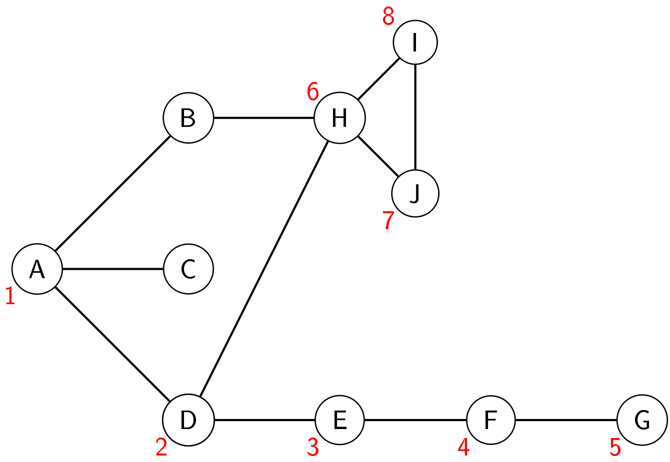
PILE : B C I J

Exemple de DFS



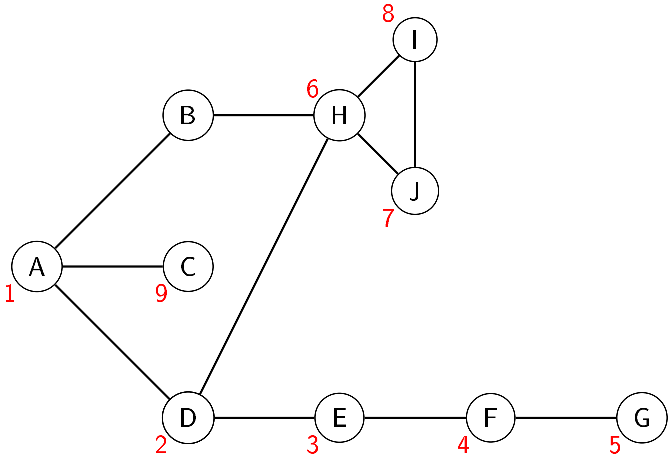
PILE : B C I

Exemple de DFS



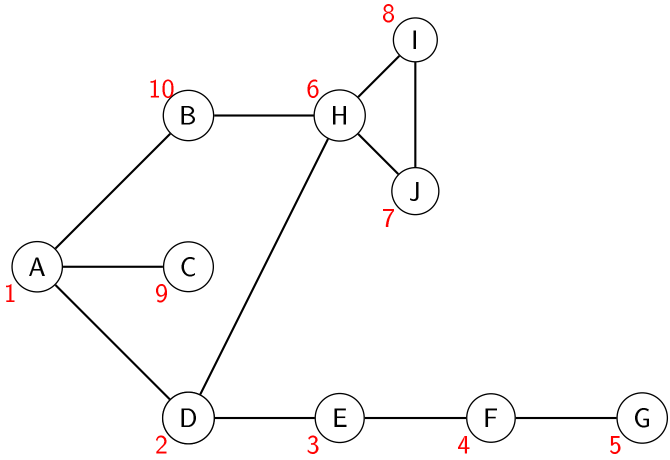
PILE : B C

Exemple de DFS



PILE : B

Exemple de DFS



PILE : vide

Parcours en profondeur récursif

Données : un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $x_0 \in V$
Résultat : une numérotation α en profondeur de la composante connexe contenant x_0

début
  $i \longleftarrow 0$;
  Fonction *DFS_rec(graphe G, sommet s)*
   begin
    $i \longleftarrow i+1$;
    $\alpha(s) \longleftarrow i$;
    pour *chaque* $y \in N(s)$ *non numéroté* **faire**
     DFS_rec(G,y) ;
    fin
  end
  DFS_rec(G,x_0) ;
  retourner α ;
fin

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Colorier un graphe, c'est attribuer une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents aient une couleur différente.
But : utiliser le moins de couleurs

Colorier un graphe, c'est attribuer une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents aient une couleur différente.
But : utiliser le moins de couleurs

Définition

On appelle *nombre chromatique* d'un graphe G, noté $\chi(G)$, le plus petit nombre de couleurs nécessaires à la coloration de G.

Colorier un graphe, c'est attribuer une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents aient une couleur différente.
But : utiliser le moins de couleurs

Définition

On appelle *nombre chromatique* d'un graphe G, noté $\chi(G)$, le plus petit nombre de couleurs nécessaires à la coloration de G.

Exemples

$\chi(K_n) = n$ $\chi(P_n) = 2$ $\chi(C_{2n}) = 2$ $\chi(C_{2n+1}) = 3$

Colorier un graphe, c'est attribuer une couleur à chaque sommet, de sorte que deux sommets adjacents aient une couleur différente.
But : utiliser le moins de couleurs

Définition

On appelle *nombre chromatique* d'un graphe G, noté $\chi(G)$, le plus petit nombre de couleurs nécessaires à la coloration de G.

Exemples

$\chi(K_n) = n$ $\quad \chi(P_n) = 2$ $\quad \chi(C_{2n}) = 2$ $\quad \chi(C_{2n+1}) = 3$

Pas facile en pratique sur un graphe quelconque. . .

Encadrement de $\chi(G)$

On note $\omega(G)$ la taille d'une clique maximale et $\Delta(G)$ le degré maximum d'un de ses sommets.

Encadrement de $\chi(G)$

On note $\omega(G)$ la taille d'une clique maximale et $\Delta(G)$ le degré maximum d'un de ses sommets.

Proposition

$$\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1 \leqslant |V|$$

Encadrement de $\chi(G)$

On note $\omega(G)$ la taille d'une clique maximale et $\Delta(G)$ le degré maximum d'un de ses sommets.

Proposition

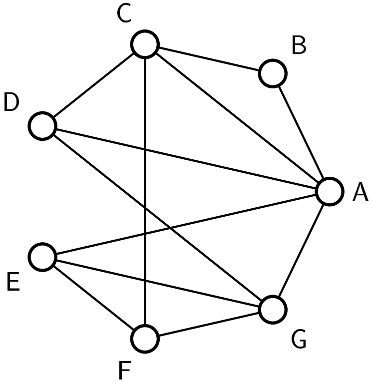
$$\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1 \leqslant |V|$$

- Résultat général optimal car les quatre membres sont égaux si $G = K_n$;
- mais décevant car l'écart entre $\chi(G)$ et $\Delta(G)$ peut tendre vers l'infini ! (considérer S_n) ;
- $\omega(G)$ est généralement difficile à déterminer.

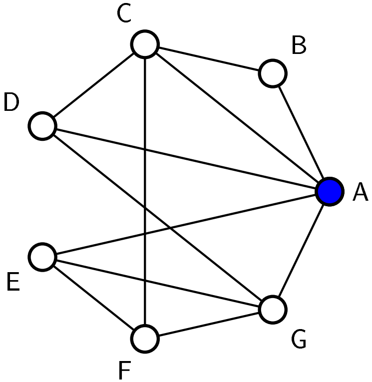
Algorithme de Welsh-Powell

algorithme heuristique (solution approchée) et glouton (donc efficace)

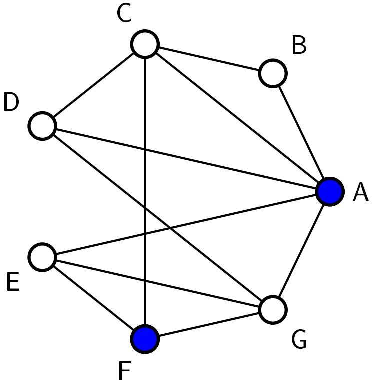
Données : un graphe $G = (V, E)$ non orienté
Résultat : une coloration α des sommets
début
  $L \longleftarrow$ liste des sommets par ordre décroissant des degrés ;
  $couleur \longleftarrow 1$;
  tant que *des sommets ne sont pas coloriés* **faire**
    $s \longleftarrow$ premier sommet de L non colorié ;
    $\alpha(s) \longleftarrow couleur$;
    pour $x \in L$ *non adjacent à* s *et non adjacent à un sommet de* *couleur* **faire**
      $\alpha(x) \longleftarrow couleur$;
    fin
    $couleur \longleftarrow couleur + 1$;
  fin
  retourner α ;
fin



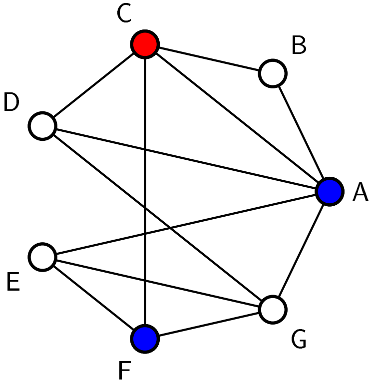
Sommet	Degré	Couleur
A	5	
C	4	
G	4	
D	3	
E	3	
F	3	
B	2	



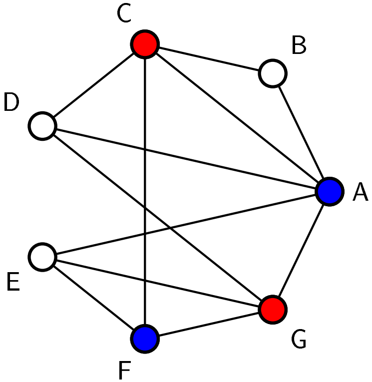
Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	
G	4	
D	3	
E	3	
F	3	
B	2	



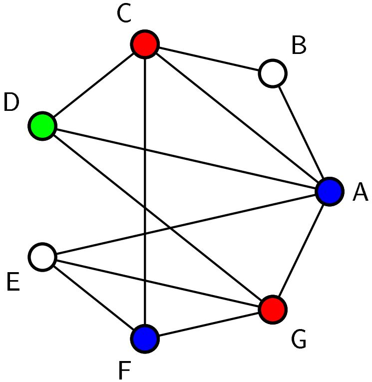
Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	
G	4	
D	3	
E	3	
F	3	bleu
B	2	



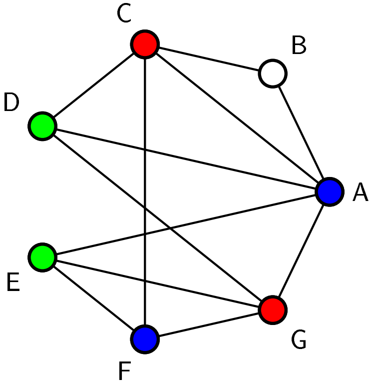
Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	
D	3	
E	3	
F	3	bleu
B	2	



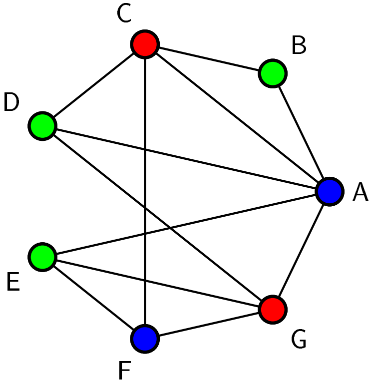
Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	
E	3	
F	3	bleu
B	2	



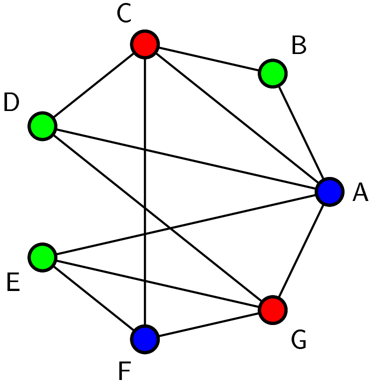
Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	vert
E	3	
F	3	bleu
B	2	



Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	vert
E	3	vert
F	3	bleu
B	2	

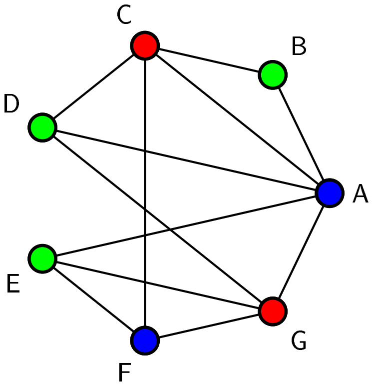


Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	vert
E	3	vert
F	3	bleu
B	2	vert



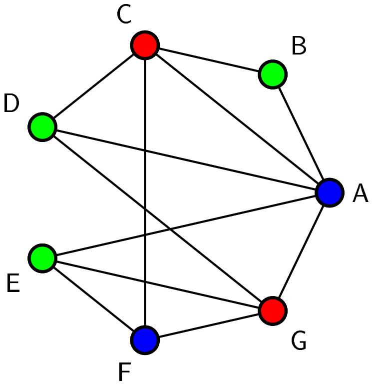
Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	vert
E	3	vert
F	3	bleu
B	2	vert

Ainsi $\chi(G) \leqslant 3$.



Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	vert
E	3	vert
F	3	bleu
B	2	vert

Ainsi $\chi(G) \leqslant 3$.
Or $\omega(G) \geqslant 3$ car G contient des triangles.



Sommet	Degré	Couleur
A	5	bleu
C	4	rouge
G	4	rouge
D	3	vert
E	3	vert
F	3	bleu
B	2	vert

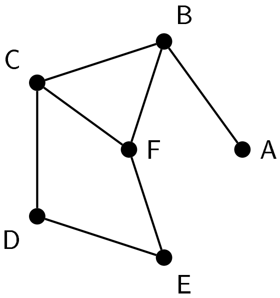
Ainsi $\chi(G) \leqslant 3$.
Or $\omega(G) \geqslant 3$ car G contient des triangles.
Donc $\boxed{\chi(G) = 3}$.

La coloration de graphe permet de résoudre des problèmes divers :

- tâches à effectuer mais certaines ne pouvant se faire simultanément (gestion d'emplois du temps. . .) ;
- créer des groupes en respectant des incompatibilités ;
- théorème de la galerie d'art (voir TD).

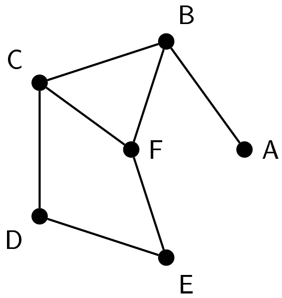
1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Formule d'Euler

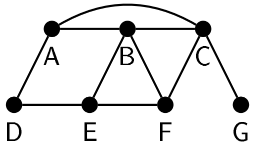


Nombre de sommets : $n = 6$
Nombre d'arêtes : $m = 7$
Nombre de faces : $f = 3$

Formule d'Euler

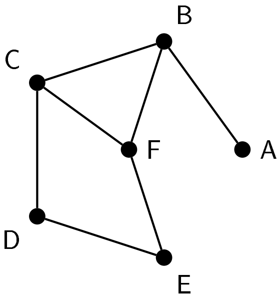


Nombre de sommets : $n = 6$
Nombre d'arêtes : $m = 7$
Nombre de faces : $f = 3$

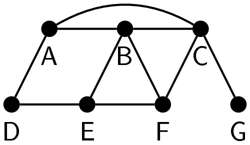


Nombre de sommets : $n = 7$
Nombre d'arêtes : $m = 10$
Nombre de faces : $f = 5$

Formule d'Euler



Nombre de sommets : $n = 6$
Nombre d'arêtes : $m = 7$
Nombre de faces : $f = 3$



Nombre de sommets : $n = 7$
Nombre d'arêtes : $m = 10$
Nombre de faces : $f = 5$

On constate que $n + f - m$ semble valoir toujours 2.

Formule d'Euler 1752

Théorème

Tout représentation plane d'un graphe G planaire connexe vérifie la formule d'Euler : $n+f-m=2$.

Démonstration.

$\square$

Formule d'Euler 1752

Théorème

Tout représentation plane d'un graphe G planaire connexe vérifie la formule d'Euler : $n + f - m = 2$.

Démonstration.

Par récurrence sur m.
Si $m = 1$, alors par connexité $G = K_2$, donc $n = 2$ et $f = 1$. La formule d'Euler est bien vérifiée.

$\square$

Formule d'Euler 1752

Théorème

Tout représentation plane d'un graphe G planaire connexe vérifie la formule d'Euler : $n+f-m=2$.

Démonstration.

Supposons le théorème vrai pour les graphes ayant moins de $m \in \mathbb{N}^*$ arêtes. Soit G un graphe planaire connexe avec m arêtes (n sommets et f faces) :

$\square$

Formule d'Euler 1752

Théorème

Tout représentation plane d'un graphe G planaire connexe vérifie la formule d'Euler : $n+f-m=2$.

Démonstration.

Supposons le théorème vrai pour les graphes ayant moins de $m \in \mathbb{N}^*$ arêtes. Soit G un graphe planaire connexe avec m arêtes (n sommets et f faces) :
– soit G a un cycle ; en retirant un arête de ce cycle, le graphe reste planaire et connexe, avec n sommets, $m-1$ arêtes et $f-1$ faces. Par HR, on a $n+(f-1)-(m-1)=2$. En développant on trouve $n+f-m=2$.

$\square$

Formule d'Euler 1752

Théorème

Tout représentation plane d'un graphe G planaire connexe vérifie la formule d'Euler : $n+f-m=2$.

Démonstration.

Supposons le théorème vrai pour les graphes ayant moins de $m \in \mathbb{N}^*$ arêtes. Soit G un graphe planaire connexe avec m arêtes (n sommets et f faces) :

– soit G a un cycle ; en retirant un arête de ce cycle, le graphe reste planaire et connexe, avec n sommets, $m-1$ arêtes et $f-1$ faces. Par HR, on a $n+(f-1)-(m-1)=2$. En développant on trouve $n+f-m=2$.

– soit G n'a pas de cycle : c'est un arbre ; soit x un sommet pendant (il y en a au moins deux !). En retirant x et la seule arête issue de x, on obtient un graphe planaire connexe à $n-1$ sommets, $m-1$ arêtes et f faces. Par HR : $(n-1)+f-(m-1)=2$. En développant on trouve $n+f-m=2$. □

Pas trop d'arêtes. . .

Théorème

1. *Dans un graphe planaire connexe avec* $n > 2$, *on a toujours* $m \leqslant 3n - 6$.
2. *Tout graphe planaire connexe admet au moins un sommet de degré au plus égal à 5.*

Pas trop d'arêtes. . .

Théorème

1. *Dans un graphe planaire connexe avec* $n > 2$*, on a toujours* $m \leqslant 3n - 6$*.*
2. *Tout graphe planaire connexe admet au moins un sommet de degré au plus égal à 5.*

Démonstration.

1. Toute face est bordée par au moins 3 arêtes, et une arête appartient à au plus 2 faces, donc $3f \leqslant 2m$ soit $f \leqslant \frac{2}{3}m$. D'après la formule d'Euler, on a
$$m = n + f - 2 \leqslant n + \frac{2}{3}m - 2$$
d'où $m \leqslant 3n - 6$.
2. Par l'absurde, si tous les sommets étaient de degré au moins 6, la somme des degrés vaudrait au moins $6n$. Or cette somme vaut $2m$. Donc on aurait $m \geqslant 3n$, ce qui contredit le point précédent.

Cas de K_5

Théorème

K_5 n'est pas planaire.

Cas de K_5

Théorème

K_5 n'est pas planaire.

Démonstration.

Par l'absurde, supposons qu'il le soit. Il admet alors une représentation plane qui vérifie la formule d'Euler, d'où un nombre de faces

$$f = 2 - n + m = 2 - 5 + 10 = 7\,.$$

Cela fait en moyenne $\frac{2m}{f} = \frac{20}{7}$ arêtes par face. Ce nombre est inférieur à 3, alors qu'une face est bordée par au moins 3 arêtes ! $\square$

Cas de $K_{3,3}$

Théorème

$K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Cas de $K_{3,3}$

Théorème

$K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Démonstration.

Par l'absurde, supposons qu'il le soit. Il admet alors une représentation plane qui vérifie la formule d'Euler, d'où un nombre de faces

$$f = 2 - n + m = 2 - 6 + 9 = 5\,.$$

Cela fait en moyenne $\frac{2m}{f} = \frac{18}{5}$ arêtes par face. Ce nombre est inférieur à 4, alors qu'une face d'un graphe biparti est bordée par au moins 4 arêtes (pas de cycle de longueur impair). $\square$

Et c'est tout !

Théorème (Kuratowski 1930)

Un graphe est planaire SSI aucun de ses sous-graphes n'est une subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.

Colorier des cartes

Théorème

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 6.

Colorier des cartes

Théorème

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 6.

Démonstration.

Par récurrence sur n en utilisant le théorème précédent. $\square$

Colorier des cartes

Théorème

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 6.

Démonstration.

Par récurrence sur n en utilisant le théorème précédent. □

Théorème (Heawood 1890)

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 5.

Colorier des cartes

Théorème

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 6.

Démonstration.

Par récurrence sur n en utilisant le théorème précédent. □

Théorème (Heawood 1890)

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 5.

Théorème (Appel & Haken 1976)

Le nombre chromatique d'un graphe planaire est au plus 4.

Un graphe *valué* est un triplet $G = (V, E, f)$ où f est une fonction de E dans $\mathbb{R}$. Autrement dit chaque arête est munie d'une valeur.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - **Plus court chemin**
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Étant donné un graphe valué et un sommet initial $s \in V$, on cherche le plus court (de poids minimal) chemin de s aux autres sommets du graphe.

Deux algorithmes :

Étant donné un graphe valué et un sommet initial $s \in V$, on cherche le plus court (de poids minimal) chemin de s aux autres sommets du graphe.

Deux algorithmes :

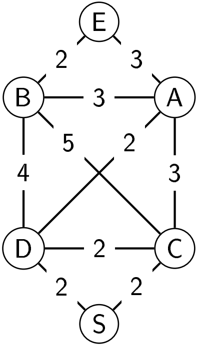
- Dijkstra : uniquement avec des valuations positives
- Bellman-Ford : tous les graphes valués, mais sans cycle de poids total négatif

Algorithme de Dijkstra 1959

Données : un graphe $G = (V, E, p)$ pondéré par une fonction p, un sommet de départ $s \in V$
Résultat : une valuation d qui est la distance d'un PCC à partir de s ; une fonction *pere* sur V donnant une arborescence représentant les PCC trouvés

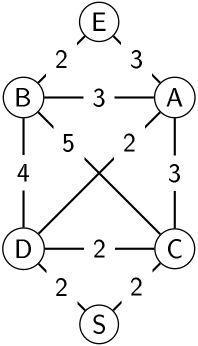
```
début
  d(s) ⟵ 0 ;
  TRAITE ⟵ s ;
  pour x ∈ N(s) faire
    pere(x) ⟵ s ;
    d(x) ⟵ p(sx) ;
  fin
  pour x ∉ {s} ∪ N(s) faire
    d(x) ⟵ +∞ ;
  fin
  tant que TRAITE ≠ V faire
    choisir x ∉ TRAITE tel que d(x) soit minimal ;
    TRAITE ⟵ x ;
    pour y ∈ N(x) \ TRAITE faire
      si d(x) + p(xy) < d(y) alors
        d(y) ⟵ d(x) + p(xy) ;
        pere(y) ⟵ x ;
      fin
    fin
  fin
  retourner d et pere
fin
```

Exemple Dijsktra depuis E



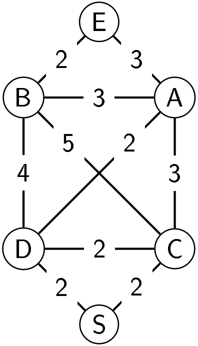
E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E

Exemple Dijsktra depuis E



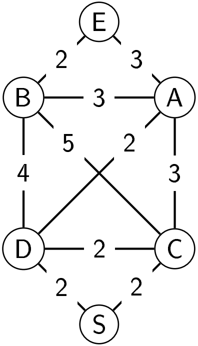
E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E
	3(E)	2(E)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B

Exemple Dijsktra depuis E



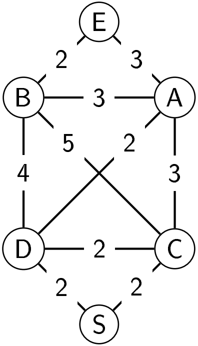
E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E
	3(E)	2(E)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
	3(E)		7(B)	6(B)	$+\infty$	A

Exemple Dijsktra depuis E



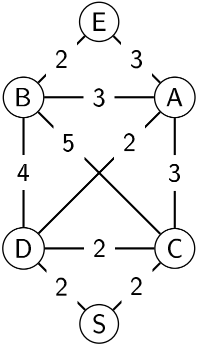
E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E
	3(E)	2(E)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
	3(E)		7(B)	6(B)	$+\infty$	A
			6(A)	5(A)	$+\infty$	D

Exemple Dijsktra depuis E



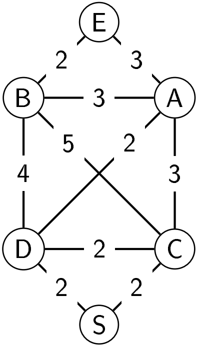
E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E
	3(E)	2(E)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
	3(E)		7(B)	6(B)	$+\infty$	A
			6(A)	5(A)	$+\infty$	D
			6(A)		7(D)	C

Exemple Dijsktra depuis E



E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E
	3(E)	2(E)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
	3(E)		7(B)	6(B)	$+\infty$	A
			6(A)	5(A)	$+\infty$	D
			6(A)		7(D)	C
					7(D)	S

Exemple Dijsktra depuis E



E	A	B	C	D	S	Traité
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	E
	3(E)	2(E)	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	B
	3(E)		7(B)	6(B)	$+\infty$	A
			6(A)	5(A)	$+\infty$	D
			6(A)		7(D)	C
					7(D)	S

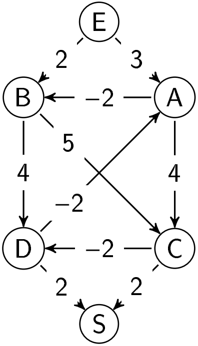
La dernière case de chaque colonne donne la distance minimale depuis E ainsi que le sommet d'où l'on vient, ce qui permet de reconstituer le trajet.
Par exemple, le plus court chemin de E vers S est de poids 7 : E - A - D - S.

Algorithme de Bellman-Ford 1956

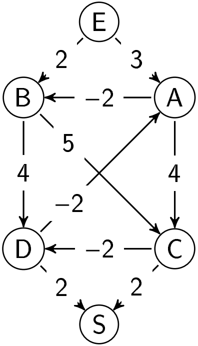
Données : un graphe $G = (V, E, p)$ pondéré par une fonction p ; un sommet départ $s \in V$
Résultat : une valuation d qui est la distance d'un PCC à partir de s ; une fonction *pere* sur V donnant une arborescence représentant les PCC trouvés

```
début
  pour x ∈ V faire
    d(x) ⟵ +∞ ;
    pere(x) ⟵ NULL ;
  fin
  d(s) ⟵ 0 ;
  pour k de 1 à |V| − 1 faire
    pour xy ∈ E faire
      si d(x) + p(xy) < d(y) alors
        d(y) ⟵ d(x) + p(xy) ;
        pere(y) ⟵ x ;
      fin
    fin
  fin
  // cycle de poids négatifs ?
  pour xy ∈ E faire
    si d(x) + p(xy) < d(y) alors
      retourner ("Erreur : G contient un cycle de poids total
       négatif")
    fin
  fin
  retourner d et pere
fin
```

Contre-exemple Bellman-Ford

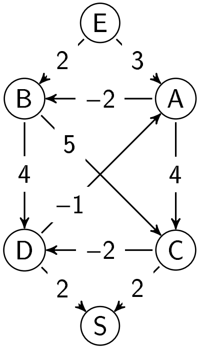


Contre-exemple Bellman-Ford



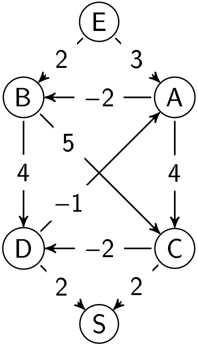
L'algorithme va afficher une erreur car le cycle A-B-C-D-A est de poids total -1.

Exemple Bellman-Ford



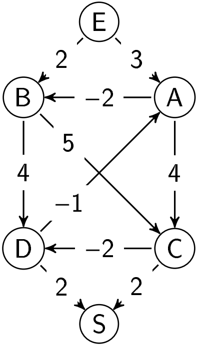
E	A	B	C	D	S	Passage n°
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0

Exemple Bellman-Ford



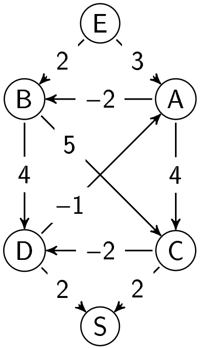
E	A	B	C	D	S	Passage n°
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
	3(E)	2(E) 1(A)	7(A) 6(B)	5(B) 4(C)	8(C) 6(D)	1

Exemple Bellman-Ford



E	A	B	C	D	S	Passage n°
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
	3(E)	2(E) 1(A)	7(A) 6(B)	5(B) 4(C)	8(C) 6(D)	1
						2

Exemple Bellman-Ford



E	A	B	C	D	S	Passage n°
0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
	3(E)	2(E) 1(A)	7(A) 6(B)	5(B) 4(C)	8(C) 6(D)	1
						2

On est censé faire 5 passages, mais dès qu'un passage s'est fait sans modification, c'est qu'il n'y aura plus de modification.
La dernière information de chaque colonne donne la distance minimale depuis E ainsi que le sommet d'où l'on vient, ce qui permet de reconstituer le trajet.
Par exemple, le plus court chemin de E vers S est de poids 6 : E - A - B- C - D - S.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - **Arbre recouvrant minimal**
   - Graphes de flot

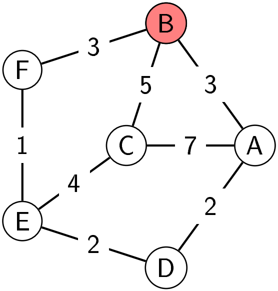
Étant donné un graphe valué, on cherche un sous-graphe partiel qui soit un arbre (*arbre recouvrant*) et dont la somme des poids des arêtes soit minimale.

Algorithme de Prim 1957 (Jarník 1930)

Données : un graphe $G = (V, E, p)$ pondéré par une fonction p
Résultat : un arbre recouvrant T (ensemble d'arêtes) de poids minimal val

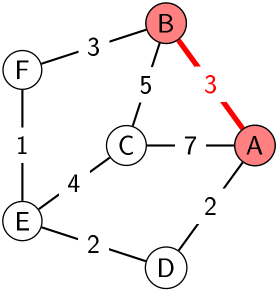
début
  choisir un sommet de départ $x_0 \in V$;
  $\mathrm{ATTEINT} \longleftarrow x_0$;
  $T \longleftarrow \varnothing$;
  $val \longleftarrow 0$;
  tant que $\mathrm{ATTEINT} \neq V$ **faire**
    trouver $xy \in E$ de poids minimal avec $x \in \mathrm{ATTEINT}$ et $y \notin \mathrm{ATTEINT}$;
    $T \longleftarrow T + \{xy\}$;
    $val \longleftarrow val + p(xy)$;
  fin
  retourner T *et* val
fin

Exemple Prim partant de B



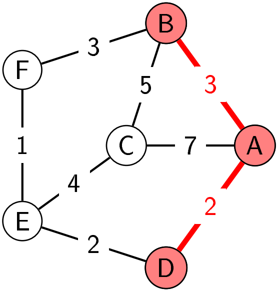
À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.

Exemple Prim partant de B



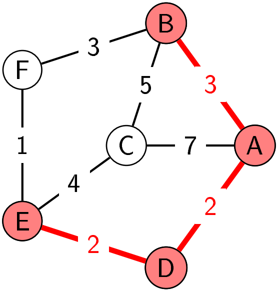
À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.

Exemple Prim partant de B



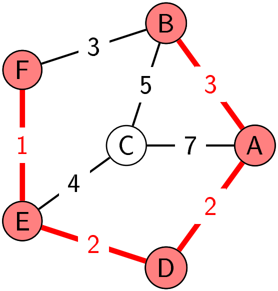
À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.

Exemple Prim partant de B



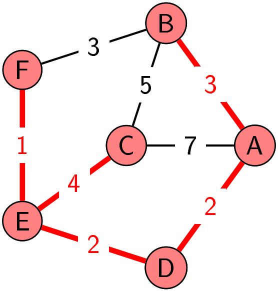
À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.

Exemple Prim partant de B



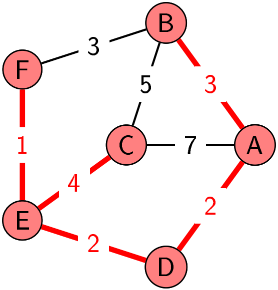
À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.

Exemple Prim partant de B



À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.

Exemple Prim partant de B



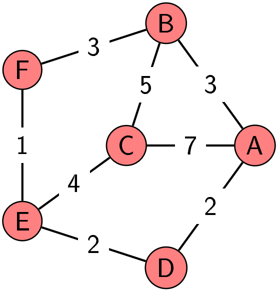
À chaque étape de Prim, notre arbre grandit.
On obtient un ARM de poids 12.

Algorithme de Kruskal 1956

Données : un graphe $G = (V, E, p)$ pondéré par une fonction p
Résultat : un arbre recouvrant T (ensemble d'arêtes) de poids minimal val

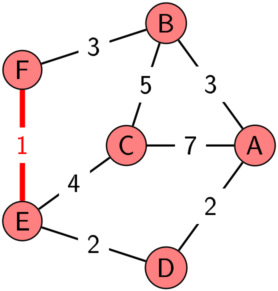
début
  $L \longleftarrow$ liste des arêtes triées par poids croissant ;
  $T \longleftarrow \emptyset$;
  $val \longleftarrow 0$;
  pour $e \in L$ **faire**
    si $T + \{e\}$ *n'a pas de cycle* **alors**
      $T \longleftarrow T + \{e\}$;
      $val \longleftarrow val + p(e)$;
    fin
  fin
  retourner T *et* val
fin

Exemple Kruskal



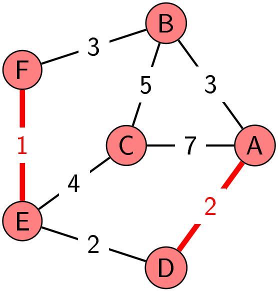
À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.

Exemple Kruskal



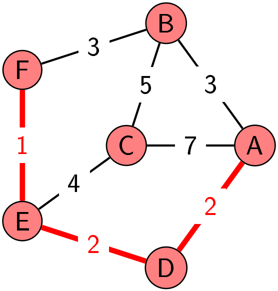
À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.

Exemple Kruskal



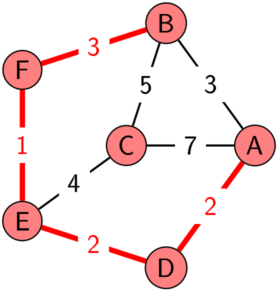
À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.

Exemple Kruskal



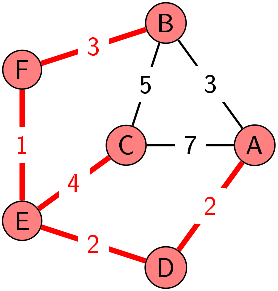
À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.

Exemple Kruskal



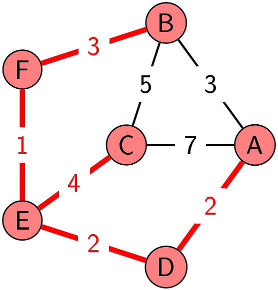
À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.

Exemple Kruskal



À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.

Exemple Kruskal



À chaque étape de Kruskal, deux arbres s'unissent.
On obtient un ARM de poids 12.

1. Généralités
   - Définitions
   - Familles de graphes
   - Sous-graphes
   - Isomorphismes
2. Graphes et chemins
   - Chaînes et cycles
   - Connexité
   - Graphes eulériens / hamiltoniens
   - Parcours
3. Graphes et couleurs
   - Nombre chromatique
   - Planarité et coloration
4. Graphes valués
   - Plus court chemin
   - Arbre recouvrant minimal
   - Graphes de flot

Définitions

- Un *réseau de flot* est un graphe simple valué $G = (V, E, c)$;

Définitions

- Un *réseau de flot* est un graphe simple valué $G = (V, E, c)$;
- $c : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la *capacité* du réseau ;

Définitions

- Un *réseau de flot* est un graphe simple valué $G = (V, E, c)$;
- $c : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la *capacité* du réseau ;
- $s \in V$ est la *source*, $p \in V$ est le *puits*.

Définitions

- Un *réseau de flot* est un graphe simple valué $G = (V, E, c)$;
- $c : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la *capacité* du réseau ;
- $s \in V$ est la *source*, $p \in V$ est le *puits*.
- Un *flot* est une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie deux conditions :

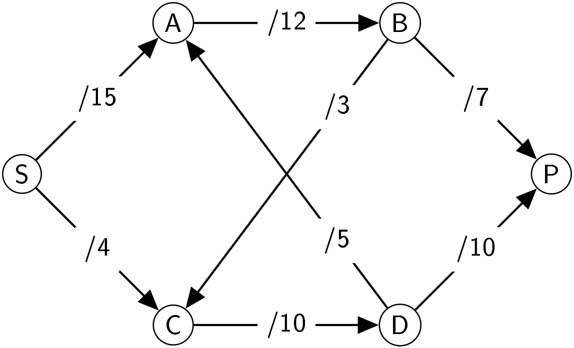
Définitions

- Un *réseau de flot* est un graphe simple valué $G = (V, E, c)$;
- $c : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la *capacité* du réseau ;
- $s \in V$ est la *source*, $p \in V$ est le *puits*.
- Un *flot* est une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie deux conditions :
  - flot $\leqslant$ capacité :
$$\forall e \in E \qquad f(e) \leqslant c(e)$$

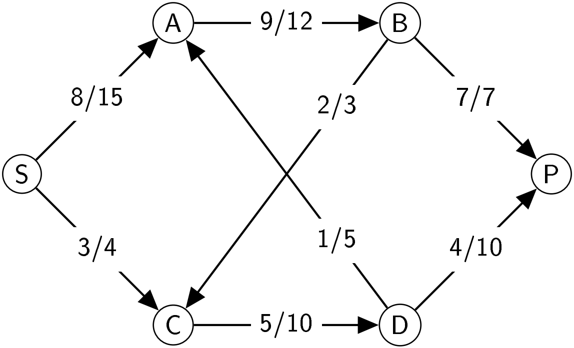
Définitions

- Un *réseau de flot* est un graphe simple valué $G = (V, E, c)$;
- $c : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est la *capacité* du réseau ;
- $s \in V$ est la *source*, $p \in V$ est le *puits*.
- Un *flot* est une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie deux conditions :
  - flot $\leqslant$ capacité :
  $$\forall e \in E \qquad f(e) \leqslant c(e)$$
  - flot entrant $=$ flot sortant (*conservation du flot*) :
  $$\forall v \in V \setminus \{s, p\} \qquad \sum_{vy \in E} f(vy) = \sum_{xv \in E} f(xv)$$

Exemple



Exemple



un flot possible de valeur 11

- Par conservation du flot en chaque nœud, le flot arrivant en P est égal au flot sortant de S.

- Par conservation du flot en chaque nœud, le flot arrivant en P est égal au flot sortant de S.
- Comment rendre ce flot maximal ?

- Par conservation du flot en chaque nœud, le flot arrivant en P est égal au flot sortant de S.
- Comment rendre ce flot maximal ?
- On va pouvoir parcourir les arcs éventuellement en sens inverse.

- Par conservation du flot en chaque nœud, le flot arrivant en P est égal au flot sortant de S.
- Comment rendre ce flot maximal ?
- On va pouvoir parcourir les arcs éventuellement en sens inverse.

Définition

Soit $(x,y) \in E$.

- L'arc (x,y) (sens direct) est dit *saturé* si $f(x,y) = c(x,y)$.
- L'arc (y,x) (sens inverse) est dit *saturé* si $f(x,y) = 0$.

- Par conservation du flot en chaque nœud, le flot arrivant en P est égal au flot sortant de S.
- Comment rendre ce flot maximal ?
- On va pouvoir parcourir les arcs éventuellement en sens inverse.

Définition

Soit $(x,y) \in E$.

- L'arc (x,y) (sens direct) est dit *saturé* si $f(x,y) = c(x,y)$.
- L'arc (y,x) (sens inverse) est dit *saturé* si $f(x,y) = 0$.

Définition

Une chaîne (suite d'arcs peu importe leur orientation) est dite *améliorante* si elle est constituée d'arcs non saturés.

Notons E^+ (resp. E^-) l'ensemble des arcs de sens direct (resp. indirect) d'une chaîne améliorante. On pose

$$\varepsilon^+ = \min_{e \in E^+} c(e) - f(e)$$

$$\varepsilon^- = \min_{e \in E^-} f(e)$$

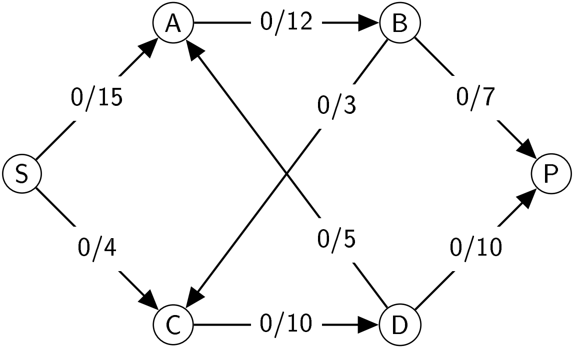
$$\varepsilon = \min(\varepsilon^+, \varepsilon^-)$$

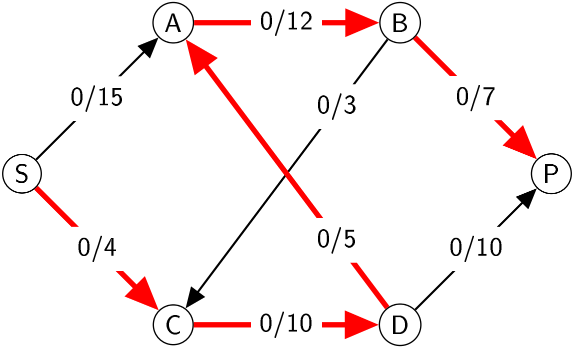
On peut alors augmenter le flot de ε :

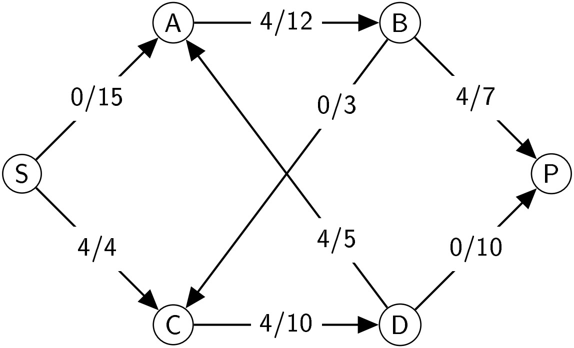
- chaque arc de E^+ voit son flot augmenté de ε ;
- chaque arc de E^- voit son flot diminué de ε.

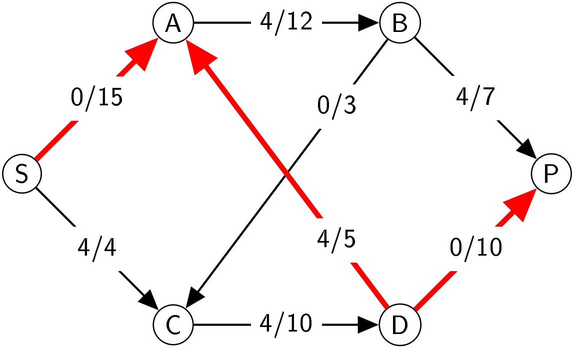
Algorithme de Ford-Fulkerson 1962

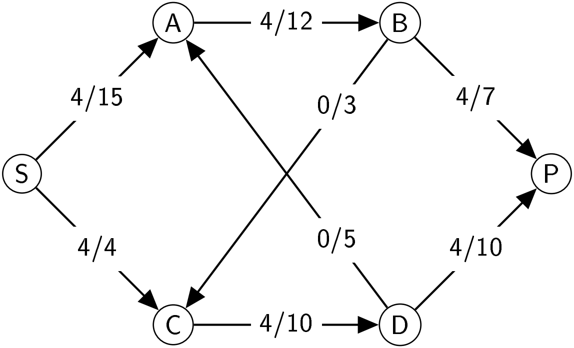
Données : un réseau de flot $G = (V, E, c)$ de capacité c
Résultat : un flot maximal
début
  tant que *il existe une chaîne améliorante* **faire**
    Améliorer le flot ;
  fin
  retourner *flot*
fin

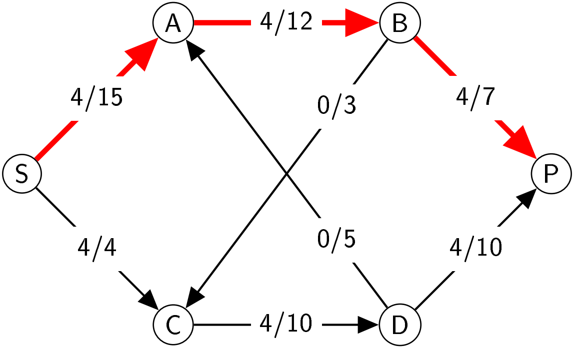

A
0/12
B
0/15
0/3
0/7
S
P
0/4
0/5
0/10
C
0/10
D

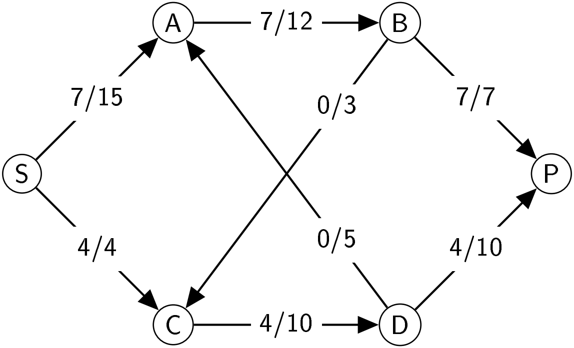

A
B
S
P
C
D
0/12
0/15
0/3
0/7
0/4
0/5
0/10
0/10

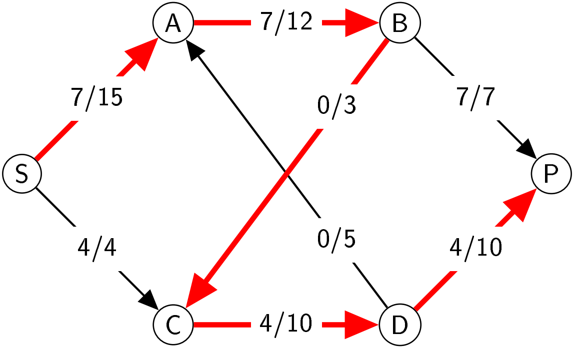

A
B
S
P
C
D
4/12
0/15
0/3
4/7
4/4
4/5
0/10
4/10

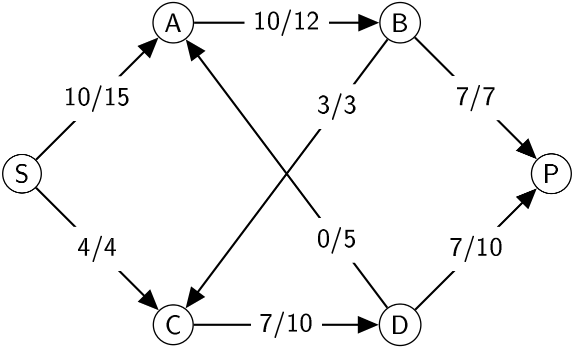

A
B
S
P
C
D
4/12
0/15
0/3
4/7
4/4
4/5
0/10
4/10

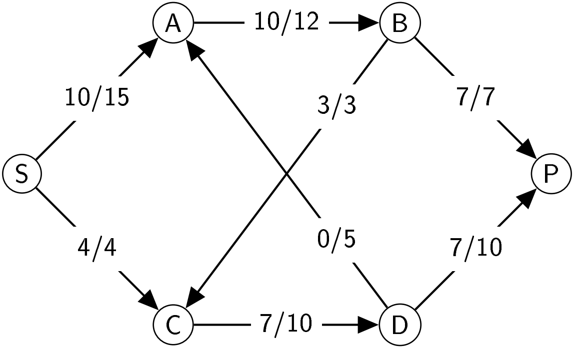

A
B
S
P
C
D
4/12
4/15
0/3
4/7
4/4
0/5
4/10
4/10


A
B
C
D
S
P
4/12
4/15
0/3
4/7
4/4
0/5
4/10
4/10


A
B
S
P
C
D
7/12
7/15
0/3
7/7
4/4
0/5
4/10
4/10


A
B
S
P
C
D
7/12
7/15
0/3
7/7
4/4
0/5
4/10
4/10


A
B
S
P
C
D
10/12
10/15
3/3
7/7
4/4
0/5
7/10
7/10



flot maximal de valeur 14

Coupe

Peut-on anticiper la valeur du flot maximal ?

Coupe

Peut-on anticiper la valeur du flot maximal ?

Définitions

- Une *coupe* est une partition de V de la forme $(X, \overline{X})$ avec $s \in X$ et $p \in \overline{X}$.
- La *capacité* d'une coupe est

$$\sum_{\substack{xy \in E \\ x \in X \\ y \in \overline{X}}} c(x, y)\,.$$

Coupe

Peut-on anticiper la valeur du flot maximal ?

Définitions

- Une *coupe* est une partition de V de la forme $(X, \overline{X})$ avec $s \in X$ et $p \in \overline{X}$.
- La *capacité* d'une coupe est

$$\sum_{\substack{xy \in E \\ x \in X \\ y \in \overline{X}}} c(x,y)\,.$$

- Une coupe est *minimale* si sa capacité est minimale parmi toutes les coupes possibles.

Théorème flot maximal/coupe minimale (1956)

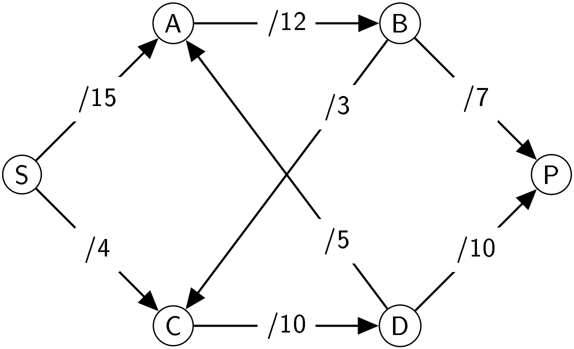
Théorème

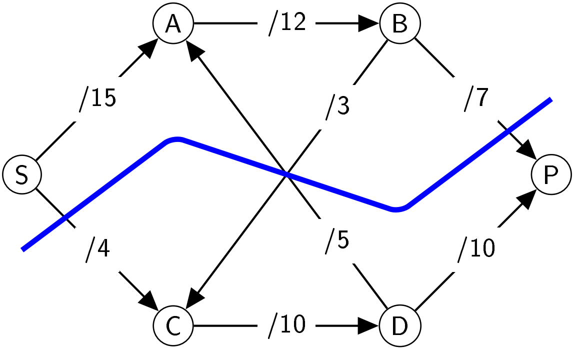
La valeur d'un flot maximal est égal à la valeur d'une coupe minimale.

De plus toutes les arcs de la coupe minimale (ayant donc leur origine dans X et leur extrémité dans $\overline{X}$) sont saturés par le flot maximal (« goulot d'étranglement »).

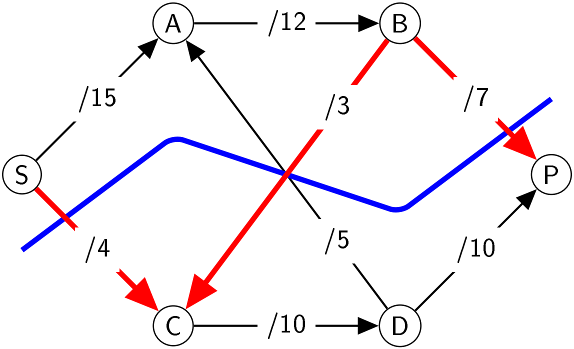
mpechaud.fr/scripts/maxflow/index.html

www.cambridge.org/core/services/aop-cambridge-core/content/view/5D6E55D3B06C4F7B1043BC1D82D40764/S0008414X00036890a.pdf/maximal_flow_through_a_network.pdf


A
B
S
P
C
D
/12
/15
/3
/7
/4
/5
/10
/10



$X = \{S, A, B\}$ et $\overline{X} = \{C, D, P\}$



$X = \{S, A, B\}$ et $\overline{X} = \{C, D, P\}$
est une coupe minimale

Mathématiciens, par ordre de citation

Leonhard Euler (1707-1783) : suisse
William Rowan Hamilton (1805-1865) : irlandais
Øystein Ore (1899-1968) : norvégien
Gabriel Andrew Dirac (1925-1984) : hongro-anglais (né en Hongrie, mort en Suisse, a enseigné au Danemark)
Dominic James Anthony Welsh (1938-) : anglais
Martin Beynon Powell (XX^{e}) : anglais
Kazimierz Kuratowski (1896-1980) : polonais
Percy John Heawood (1861-1955) : britannique
Kenneth Ira Appel (1932-2013) : américain
Wolfgang Haken (1928-) : allemand
Edsger Wybe Dijkstra (1930-2002) : néerlandais
Richard Ernest Bellman (1920-1984) : américain
Lester Randolph Ford Jr. (1927-2017) : américain
Robert Clay Prim (1921-) : américain
Joseph Bernard Kruskal Jr. (1928-2010) : américain
Delbert Ray Fulkerson (1924-1976) : américain