

TP n°3 : Interpolation polynômiale

Matrice de Vandermonde On cherche à résoudre le problème d'interpolation polynômiale par résolution du système linéaire obtenu en écrivant le système de $n+1$ équations à $n+1$ inconnues. On cherche donc l'unique polynôme de degré n passant par les points $(x_i; f_i)_{i=0,\dots,n}$ d'une fonction f donnée. Les points $(x_i)_{i=0,\dots,n}$ étant tous distincts.

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{j=n} a_j x_i^j = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

Soit matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1^1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

1. Ecrire un programme scilab qui détermine le polynôme d'interpolation par résolution du système linéaire associé, utilisant la matrice de Vandermonde.

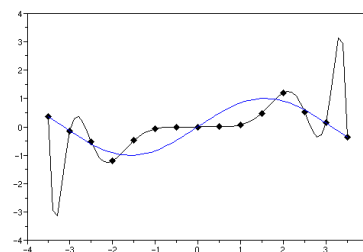
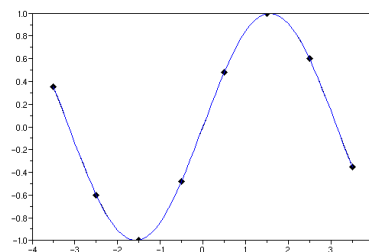
- Pour construire la matrice de vandermonde, on peut remarquer que la

première colonne vaut $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, et qu'il suffit ensuite de la multiplier à

chaque fois, terme à terme, par le vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- Après avoir résolu le système, vous pouvez utiliser la fonction `poly` qui permet de construire un polynôme à partir de ses coefficients.

2. Utiliser votre programme avec la fonction `sin` et des points d'interpolation régulièrement espacés de l'intervalle $[-3.5, 3.5]$. Que se passe-t-il quand le nombre de points est trop grand ?



3. Faire de même avec la fonction $\frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$.

Polynômes d'interpolations de Lagrange On utilise directement les polynômes de Lagrange (base de $\mathbb{R}_n[x]$) pour écrire le polynôme d'interpolation. Le i -ème polynôme L_i s'écrit

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

de sorte que $L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = k \\ 0 & \text{pour } i \neq k \end{cases}$.

Le polynôme d'interpolation s'écrit alors

$$p(x) = \sum_{i=0}^{i=n} f_i L_i(x)$$

1. Ecrire un programme scilab qui construit le polynôme interpolateur par construction directe à partir des polynômes de Lagrange.
2. Tester avec les deux exemples de la question précédente. Quid ?

