TP n°1 : Algorithme de Gauss

- Le but est d'implémenter (avec Scilab) la résolution d'un système linéaire, par la méthode (directe) de l'algorithme de Gauss vu en cours et en td.
- Pour débuter avec Scilab, consulter le guide et la documentation dans la partie ressource en algèbre linéaire sur `www.iut-fbleau.fr`.

Rappels

$$\left\{\begin{array}{llllllll} e_1: & a_{11}x_1 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ e_2: & a_{21}x_1 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ e_n: & a_{n1}x_1 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}.x_j = b_i \\ i = 1, \dots, n \end{array}\right.$$

Avec Scilab, un tel système se représente par deux matrices A de taille $n \times p$ et b de taille $n \times 1$.
En utilisant l'écriture matriciel du système, on peut écrire une fonction qui applique la méthode de Gauss au couple (A, y) où A est une matrice à n lignes et p colonnes et b est un vecteur à n lignes. A une étape donnée de la méthode de Gauss une partie de la matrice a déjà été traité (le haut et la gauche de la matrice) et l'on se trouve en position (i, j) dans la matrice A (pour rechercher un nouveau pivot) et en position i dans le vecteur b :

$$\begin{pmatrix} \ddots & \multicolumn{2}{c}{\text{partie déjà traitée}} \\ \cline{2-3} 0 & \multicolumn{1}{|l}{a_{ij}} & \cdots \\ \vdots & \multicolumn{1}{|l}{\vdots} & \\ 0 & \multicolumn{1}{|l}{} & \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

On cherche un pivot non nul dans la colonne j.

- Si oui, on l'amène en position (i, j) et on elimine l'inconnue x_j dans les équations $i+1, \dots, n$. On passe alors à la position $(i+1, j+1)$
- Si non, on passe à la position $(i, j+1)$.

A la fin, on obtient une matrice A dite **echelonnée**. (la seule diffèrence avec le cours et les td est qu'ici on ne permutte pas les colonnes).

- Les $r(\leqslant \min(n, p))$ colonnes ou l'on a pu pivoté correspondent aux inconnues principales, les autres aux paramètres.
- r est le rang du système.

Travil demandé Récupérer le canevas `tp1.sci` afin de le compléter.

1. completer la fonction `permutation(A,b,i,l)` qui permutte les equtions i et l du système.
2. completer la fonction `elimination(A,b,i,j)` qui élimine la variable x_j des équations $i+1, \dots, n$.

3. completer la fonction `resolution(A,b)` qui calcule une solution (quand il y en a) au système transformée par la méthode de Gauss (renvoie la matrice vide s'il n'y en a pas).

4. Tester avec les exercices du TD 1.

5. Pour faire d'autres tests plus consèquents :

```
-->A=int(20*rand(10,10)-10);x=int(10*rand(10,1)-5);b=A*x; // test
-->[B,u,r]=Gauss(A,b);
-->A*resolution(B,u); // doit afficher quoi ????
```